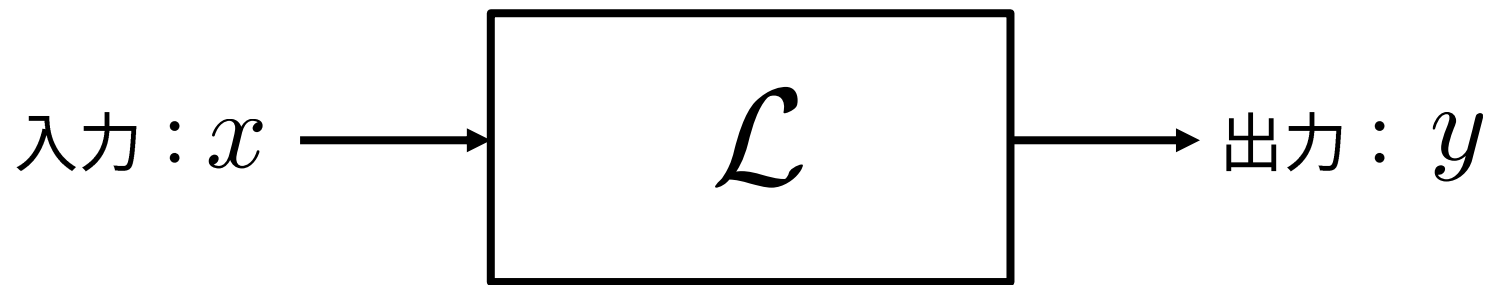


—現代工学基礎Ⅰ：物理情報システム工学—  
**信号処理の基礎 第2回**

東京大学 大学院情報理工学系研究科・工学部計数工学科  
システム情報学専攻 第一研究室 講師  
小山 翔一

# 信号処理とは？

- 音声や画像などの信号を，数理的な手法で分析／加工／合成する技術



入力  $x$  に対して写像  $\mathcal{L}$  によってなんらかの処理を行い，出力  $y$  を生成する

# 本講義の目的

- 信号処理の理論的な基礎事項をできるだけ直感的に理解する。（よって数学的に厳密でない記述もあるので注意。）
- 音声／音響信号処理への応用を例に，信号処理の工学的な有用性を理解する。

# 本日の目次

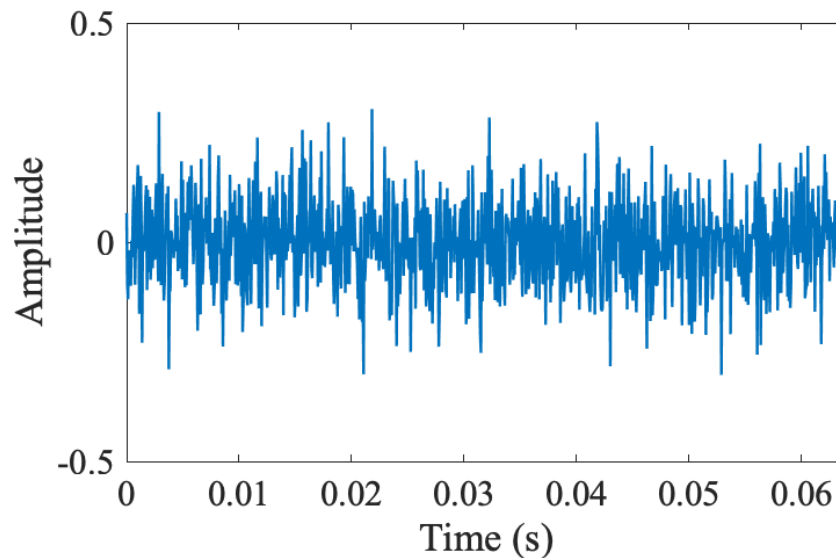
1. 不規則信号の基礎事項
2. 線形モデルと統計的推定法
3. 統計的推定法の応用例

# 不規則信号の基礎事項

# 不規則信号

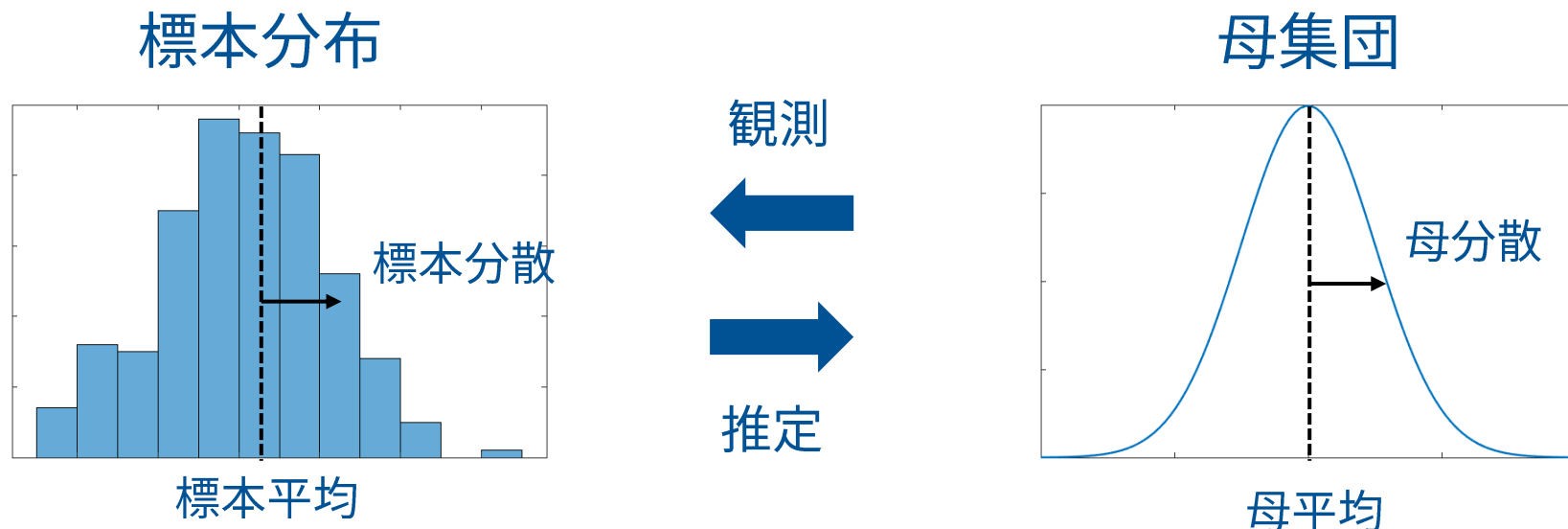
- 観測される信号が確率的にしか定まらないとき，これを**不規則信号**と呼ぶ。
- 不規則信号を数学的に扱うためのモデルが**確率過程**である。株価の変動やブラウン運動などをモデル化するために用いられる。

➡ 信号の統計的性質を捉える



# 統計的推定

## ➤ 統計的推定の基本的な考え方



観測された標本から母集団の確率密度関数に関する統計量である母数（母平均・母分散など）を推定

# 確率密度関数

- 確率変数  $X$  が連続値を取り，以下の関係を満たすとする。

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

確率変数  $X$  が  $[a, b]$  の値をとる確率

- このとき， $f(x)$  は  $X$  の確率密度関数と呼ばれ，以下を満たす。

$$f(x) \geq 0 \quad \text{および} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

- $X$  が  $x$  以下である確率を累積分布関数と呼ぶ。

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u)du$$

# 期待値と分散

- 期待値  $E[X]$  と分散  $V[X]$  は以下で与えられる。

期待値：  $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

分散：  $V[X] = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$

ここで,  $\mu = E[X]$

- また, 以下の関係式がよく用いられる。

$$V[X] = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

# 歪度と尖度

- 他にも確率密度関数を特徴付ける統計量として、**歪度 (skewness)**と**尖度 (kurtosis)**がある。

- **歪度**：確率密度関数の非対称性の度合いを表す指標。

$$\frac{1}{\sigma^3} E[(X - \mu)^3] = \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^3 f(x) dx$$

- **尖度**：確率密度関数の扁平の度合いを表す指標。

$$\frac{1}{\sigma^4} E[(X - \mu)^4] = \frac{1}{\sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^4 f(x) dx$$

ここで、 $\sigma^2 = V[X]$

- 一般に  **$n$  次モーメント**として以下が定義される。

$$E[(x - \mu)^n]$$

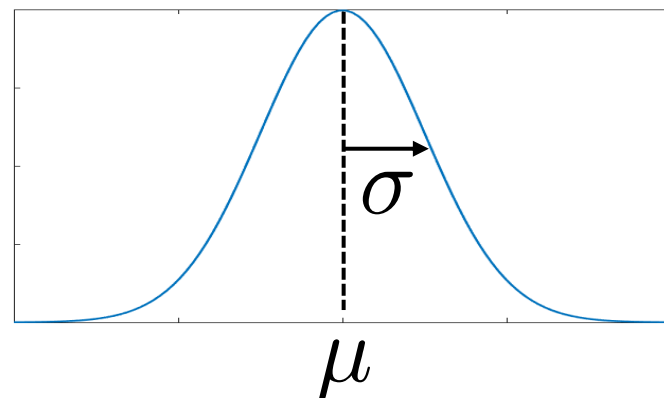
全てのモーメントが決まれば確率密度関数の形状が決まる

# 正規分布（ガウス分布）

- 期待値  $\mu$ ，分散  $\sigma^2$  の正規分布の確率密度関数は，

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$
$$:= \mathcal{N}(x; \mu, \sigma^2)$$

（確率変数  $X$  が正規分布に従う）  
➡  $X \sim \mathcal{N}(x; \mu, \sigma^2)$



- 様々な現象のモデル化に使われる。（cf. 中心極限定理）
- 正規分布は1次と2次のモーメントのみで決まる。
- 正規分布よりも尖度が大きい分布を優ガウ斯的，小さい分布を劣ガウ斯的と呼ぶ。

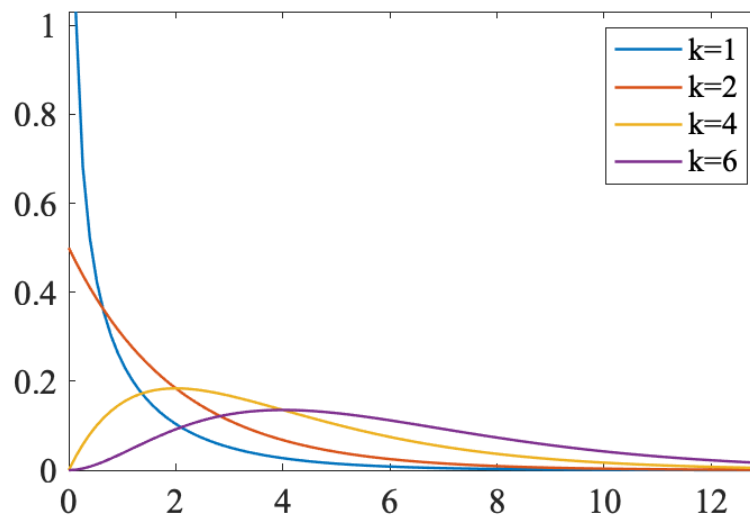
# カイ二乗分布

## ➤ カイ二乗分布の確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$$

ガンマ関数

- 標準正規分布に従う互いに独立な  $k$  個の確率変数の二乗和は  $k$  を自由度とするカイ二乗分布に従う。



# 多変数の確率分布

- 2つ以上の確率変数に関しては，同時確率分布を考える。
- 確率変数  $X$  および  $Y$  の同時確率密度関数  $f(x, y)$  は，以下の関係式を満たす。

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

- 同時確率密度関数から，一方の確率変数を積分消去して，もう一方のみの確率密度関数とすることを周辺化という。

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

# 多変数の確率分布

- 多変数の場合，確率変数をベクトルで表すことがある。
- $N$  個の確率変数を列ベクトルで表す。

$$\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_N]^\top$$

- 期待値：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= E[\boldsymbol{x}] \\ &= [E[x_1], \dots, E[x_N]]^\top \\ &= [\mu_1, \dots, \mu_N]^\top\end{aligned}$$

- 共分散行列：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma} &= E[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\top] \\ &= \begin{bmatrix} E[(x_1 - \mu_1)^2] & \cdots & E[(x_1 - \mu_1)(x_N - \mu_N)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(x_N - \mu_N)(x_1 - \mu_1)] & \cdots & E[(x_N - \mu_N)^2] \end{bmatrix}\end{aligned}$$

# 多次元正規分布

- $N$  次元正規分布の確率密度関数：

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) \right) \\ &= \mathcal{N}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \end{aligned}$$

- 確率変数のベクトル  $\boldsymbol{x}$  が正規分布に従うことを以下のように表す。

$$\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

# 定常信号と非定常信号

- 信号の統計的性質が時間によらず一定なとき，その信号は**定常信号**と呼び，そうでない場合は**非定常信号**と呼ぶ。
  - 信号の期待値と分散が時間に依存せずに一定の場合，信号は**弱定常 (weakly stationary)** であると呼ぶ。
  - 歪度や尖度など，高次の統計量も含めて時間に関して一定の場合（つまり確率密度関数が時間について不変な場合），信号は**強定常 (strongly stationary)** であると呼ぶ。

# 不規則信号の統計量

➤ 定常信号の場合：確率密度関数が時間に依存しない

– 集合平均：

$$\mu = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

– 自己相関関数：

$$R(\tau) = E[x(t + \tau)x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; \tau)$$

時間差のみに依存

– 相互相関関数：

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t + \tau)y(t)] = R_{yx}(-\tau)$$

– 自己共分散関数：

$$C(\tau) = E[(x(t + \tau) - \eta)(x(t) - \eta)] = R(\tau) - \eta^2$$

– 相互共分散関数：

$$C_{xy}(\tau) = E[(x(t + \tau) - \eta_x)(y(t) - \eta_y)] = R_{xy}(\tau) - \eta_x \eta_y$$

# 不規則信号の統計量

## ➤ 時間平均：

$$\bar{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

## ➤ エルゴード性：

- 定常信号において，時間平均と集合平均が等しい信号はエルゴード性を持つという。
- 必ずしも定常であればエルゴード性を持つことにはならないことに注意。

# 不規則信号の統計量

➤ 無相関：

$$E[x(t_1)y(t_2)] = E[x(t_1)]E[y(t_2)]$$

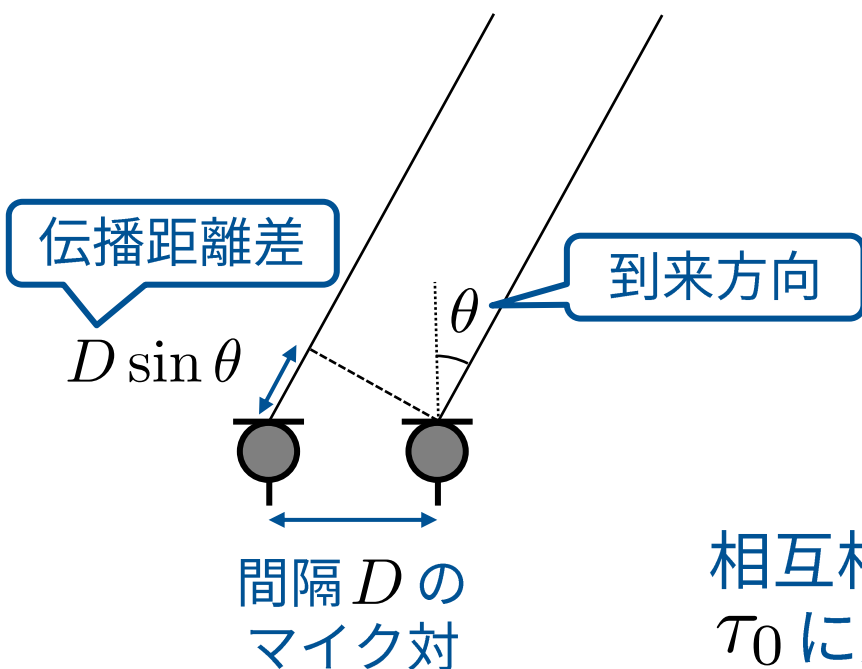
➤ 独立：

$$f_{xy}(x, y; t_1, t_2) = f_x(x; t_1)f_y(y; t_2)$$

- 「独立 ⇒ 無相関」は言えるが、「無相関 ⇒ 独立」では必ずしもない。

# 応用例：到来方向推定

- 二つのマイクを使って音の到来方向を推定したい
- 伝播の時間差を推定することで到来方向を推定



$$\begin{cases} s_1(t) = x(t - \tau_0) + n_1(t) \\ s_2(t) = x(t) + n_2(t) \\ \tau_0 = D \sin \theta / c \end{cases}$$

相互相関関数を計算し、そのピークが  
 $\tau_0$  に対応

$$R_{12}(\tau) = E[s_1(t + \tau)s_2(t)]$$

# 線形モデルと統計的推定法

# パラメータ推定

- 観測信号  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_M]^T \in \mathbb{R}^M$  から未知パラメータ  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_N]^T \in \mathbb{R}^N$  を推定することを考える。( $M \geq N$ )
- 確率密度関数を  $p(\cdot)$  と表すこととすると、代表的なパラメータ推定法は以下の3つ。

- 最尤推定 (Maximum likelihood: **ML**)法 :

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{maximize}} p(\mathbf{y}; \mathbf{x})$$

- 最大事後確率 (Maximum a posteriori: **MAP**)法 :

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{maximize}} p(\mathbf{x}; \mathbf{y})$$

- 最小二乗平均誤差 (Minimum mean-square error: **MMSE**)法 :

$$\underset{\hat{\mathbf{x}}}{\text{minimize}} E[\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|^2; \mathbf{y}]$$

# 線形モデル

- 信号処理や機械学習で多用されるモデルとして、線形モデルがある。

$$y = Ax$$

- ここで、 $A$  は各要素に実数の値を持つ、 $M \times N$  の行列である。（ $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$  と書く。）
- 要素ごとに書けば、

$$y_m = \sum_{n=1}^N a_{mn} x_n$$

$A$  の(m,n)番目の要素

- ここでは、 $A$  は既知であるとする。

# 最尤推定

- $N$ 回の観測によって、確率変数  $X_1, \dots, X_N$  に対する実現値として、観測値  $x_1, \dots, x_N$  が得られたとする。
- **最尤原理**では、得られた観測結果は確率最大のものが実現した、つまり最も起こりやすいことが起きた結果と考える。
- 観測値  $X_n$  が従う確率分布を、分布のパラメータ  $\theta$  を含めて  $f(x_n|\theta)$  と表す。
- ノイズが独立で同一な分布に従うとすれば、観測値を表す確率変数も独立となるため、

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N) &= \prod_{n=1}^N P(X_n = x_n) \\ &= \prod_{n=1}^N f(x_n|\theta) \end{aligned}$$

# 最尤推定

- 尤度関数 (likelihood function)  $\mathcal{L}(\theta)$  は、これを  $\theta$  の関数としたものである。

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{n=1}^N f(x_n|\theta)$$

- 最尤推定では尤度関数が最大となる  $\theta$  を推定解とする。

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \mathcal{L}(\theta)$$

- 多くの場合、尤度関数の対数を取った対数尤度関数を用いる方が計算が簡単になる。

log は単調増加関数

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \log \mathcal{L}(\theta)$$

# 線形モデルにおける最尤推定

- 加法的なノイズ  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^M$  が重畳される場合,

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{n}$$

- ノイズは平均0で分散 $\sigma^2$ の多次元正規分布に従うとする。

$$\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(\mathbf{n}; \mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{M/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{n}\|^2\right)$$

- このとき、観測値が従う確率密度関数  $p(\mathbf{y})$  は,

$$p(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{M/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2\right)$$

# 線形モデルにおける最尤推定

- ML法により  $\mathbf{x}$  を推定することを考える。対数尤度関数は、

$$\log \mathcal{L}(\mathbf{x}) = \log p(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 + C$$

$\mathbf{x}$  を含まない定数項

- ML解  $\hat{\mathbf{x}}$  は、以下を解くことで得られる。

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2$$

- 未知量を、二乗誤差をコスト関数として最小化する解として推定する、**最小二乗法 (least-squares method)** と一致する。

# 線形モデルにおける最尤推定

- コスト関数を  $\mathbf{x}$  で微分して0とおくと,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{y}^\top \mathbf{y} - \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{y} - \mathbf{y}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}) \\ &= -\mathbf{A}^\top \mathbf{y} - (\mathbf{y}^\top \mathbf{A})^\top + 2\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= 2(-\mathbf{A}^\top \mathbf{y} + \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}) \\ &= 0\end{aligned}$$

- (参考) ベクトルに関する微分公式

$$\frac{\partial \mathbf{x}^\top \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{b}^\top \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{b}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^\top \mathbf{B} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{B} + \mathbf{B}^\top) \mathbf{x}$$

# 線形モデルにおける最尤推定

- 最適解  $\hat{\boldsymbol{x}}$  は,

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{y}$$

- 線形モデルにおいて、ノイズに正規分布を仮定した解は、**最小二乗解**となる。
- 最小二乗解についても不偏性を持つ。

# ベイズ推定

- ベイズ推定では，線形モデルの未知変数  $\boldsymbol{x}$  も確率変数とみなす。 ➡ 最尤推定との大きな違い。
- ベイズの定理を用いると， $\boldsymbol{y}$  が与えられた下での  $\boldsymbol{x}$  の確率分布である，事後確率分布が以下のように表現できる。

$$p(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = \frac{p(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x})}{\int p(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}} \propto p(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x})$$

ここで， $p(\boldsymbol{x})$ は事前確率分布と呼ばれ， $p(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{x})$  は尤度。

# 最大事後確率推定

- 最大事後確率(MAP)推定では，以下の規準で推定値を求める。

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \arg \max_x p(x; y) \\ &= \arg \max_x p(y; x)p(x)\end{aligned}$$

ベイズの定理

- 事前情報がない場合， $p(x)$ は定数（無情報事前分布）となり，最尤推定と一致。
- 事前確率分布が尤度の共役事前分布となっている場合，事後確率分布の計算が容易になる。例えば， $p(x)$ と $p(y; x)$ がともにガウス分布の場合，事後確率分布 $p(x; y)$ もガウス分布となる。

# 最小平均二乗誤差推定

- 最小平均二乗誤差(MMSE)推定では、未知変数の真値  $\mathbf{x}$  と推定値  $\hat{\mathbf{x}}$  の二乗誤差期待値が最小となるように  $\hat{\mathbf{x}}$  を求める。

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}} E[\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|^2]$$

- 線形MMSE推定器  $\mathbf{H}$  を用いて、 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}\mathbf{y}$  として推定することを考えると、

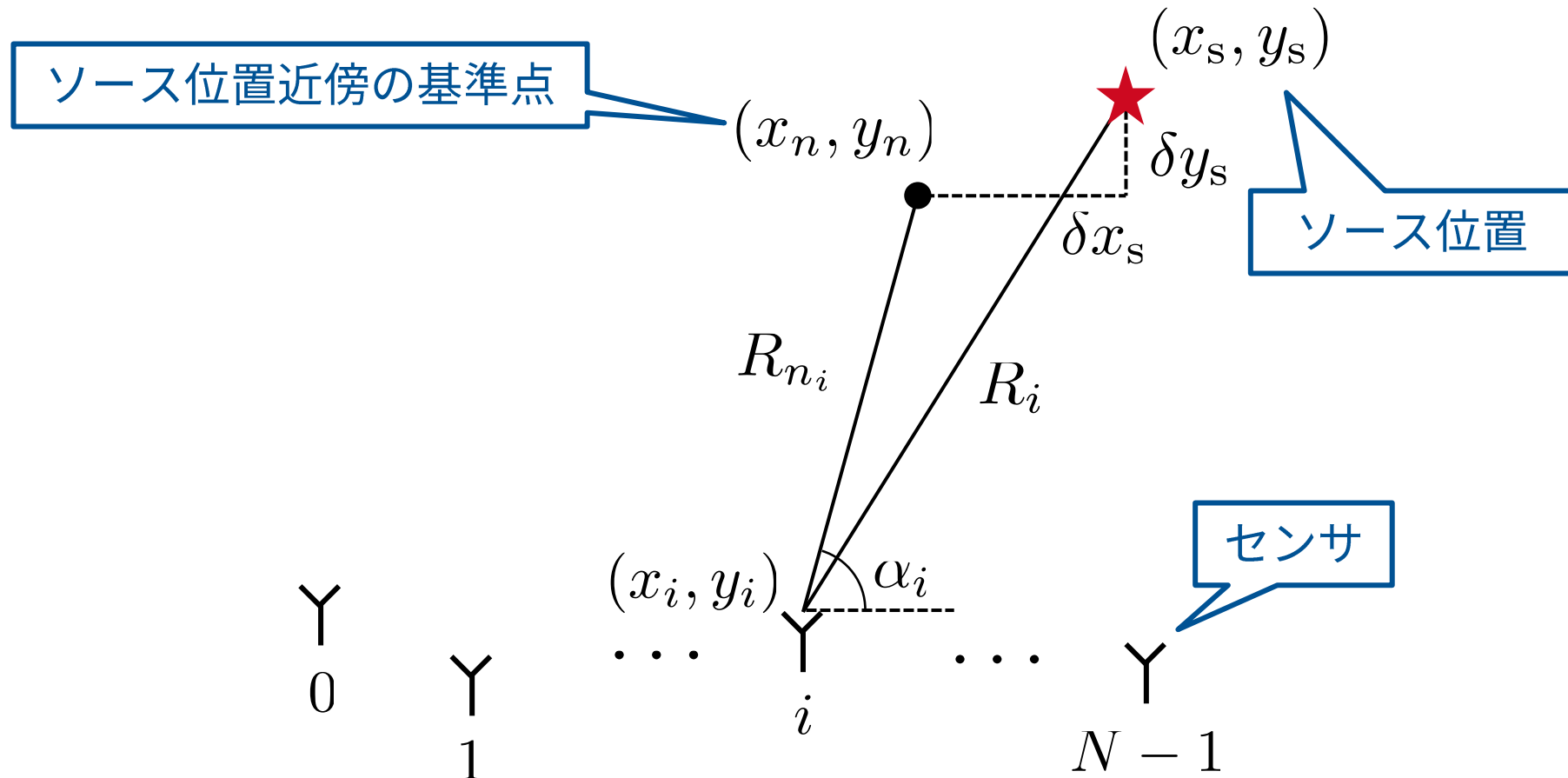
$$\underset{\mathbf{H}}{\text{minimize}} E[\|\mathbf{H}\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2]$$

を解くことで、最適な  $\mathbf{H}$  を求める問題に帰着する。

# 統計的推定法の応用例

# ソース位置推定

- $N$  個のセンサを用いて、ソース (波源) の位置を推定



➡ センサ間の信号到来時間差を既知とし、位置を推定したい

# ソース位置推定

## ➤ $i$ 番目のセンサへの信号到来時刻

$$t_i = \underbrace{T_0}_{\text{信号発出時刻}} + \underbrace{\frac{R_i}{c}}_{\text{伝搬速度}} + \underbrace{\varepsilon_i}_{\text{誤差 } \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(\varepsilon_i; 0, \sigma^2)}$$

## ➤ ソースまでの距離を線形近似すると,

$$\begin{aligned} R_i &= \sqrt{(x_s - x_i)^2 + (y_s - y_i)^2} \\ &\approx R_{n_i} + \frac{x_n - x_i}{R_{n_i}} \delta x_s + \frac{y_n - y_i}{R_{n_i}} \delta y_s \\ &= R_{n_i} + \cos \alpha_i \cdot \delta x_s + \sin \alpha_i \cdot \delta y_s \end{aligned}$$

$(x_n, y_n)$  まわりでの  
1 次のテイラー展開

➡ 
$$t_i = T_0 + \frac{R_{n_i}}{c} + \frac{\cos \alpha_i}{c} \delta x_s + \frac{\sin \alpha_i}{c} \delta y_s + \varepsilon_i$$

ここで,

$$\tau_i = t_i - \frac{R_{n_i}}{c}$$

として, 以下の  $\xi_i$  を定義

$$\begin{aligned}\xi_i &= \tau_i - \tau_{i-1} \\ &= \frac{1}{c}(\cos \alpha_i - \cos \alpha_{i-1})\delta x_s + \frac{1}{c}(\sin \alpha_i - \sin \alpha_{i-1})\delta y_s + \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}\end{aligned}$$

$\xi_i$  はセンサ間の到来時間差,  $R_{n_i}/c$  が既知より, 観測値となる

# ソース位置推定

➤ 以下のように線形モデルが得られる。

$$\mathbf{y} = [\xi_1, \dots, \xi_{N-1}]^T$$

$$\mathbf{x} = [\delta x_s, \delta y_s]^T$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 & \sin \alpha_1 - \sin \alpha_0 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \alpha_{N-1} - \cos \alpha_{N-2} & \sin \alpha_{N-1} - \sin \alpha_{N-2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n} = [\varepsilon_1 - \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{N-1} - \varepsilon_{N-2}]^T$$

$$\Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{n}$$

# ソース位置推定

➤  $\mathbf{n}$  はセンサ間の誤差の差を表すので,

$$\mathbf{n} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{N-1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\varepsilon}; \mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})}$$

➤  $\mathbf{n}$  の共分散行列は,

$$\boldsymbol{\Sigma} = E[\mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^\top \mathbf{W}^\top] = \sigma^2 \mathbf{W} \mathbf{W}^\top$$

# ソース位置推定

➤  $\boldsymbol{x}$  の最尤推定解は,

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}} &= \arg \min_{\boldsymbol{x}} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\top} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \\ &= (\boldsymbol{A}^{\top} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{A}^{\top} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{y} \\ &= (\boldsymbol{A}^{\top} (\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{\top})^{-1} \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{A}^{\top} (\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{\top})^{-1} \boldsymbol{y}\end{aligned}$$

到来時間差を観測値とする音源位置の推定式が得られた

# 線形予測分析

- 過去の信号の値の線形結合によって、現在の信号の値を予測する問題を線形予測分析という。
- $L$  サンプル前までの信号を用いる場合、

$$\hat{x}[n] = \sum_{l=1}^L h_l x[n-l]$$

- 二乗予測誤差の期待値  $E_L$  は以下のように定式化できる。

$$\begin{aligned} E_L &= E[(x[n] - \hat{x}[n])^2] \\ &= E \left[ \left( x[n] - \sum_{l=1}^L h_l x[n-l] \right)^2 \right] \end{aligned}$$

➡ 最小二乗平均誤差 (MMSE)法を適用し、 $h_l$  を求める。

# 線形予測分析

- 二乗予測誤差の期待値  $E_L$  が最小になるような係数  $h_l$  を求めたい。そのような係数は  $E_L$  を  $h_l$  で偏微分したものが0となるように求めればよい。

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_L}{\partial h_k} &= E \left[ -2x[n-k] \left( x[n] - \sum_{l=1}^L h_l x[n-l] \right) \right] \\ &= 2 \sum_{l=1}^L h_l E[x[n-k]x[n-l]] - 2E[x[n-k]x[n]] \\ &= 0\end{aligned}$$

- 信号  $x[n]$  の自己相関関数を  $\varphi[k]$  とすると,  
 $\varphi[k] = \varphi[-k] = E[x[n]x[n-k]]$  より,

$$\sum_{l=1}^L h_l \varphi[l-k] = \varphi[k]$$

# 線形予測分析

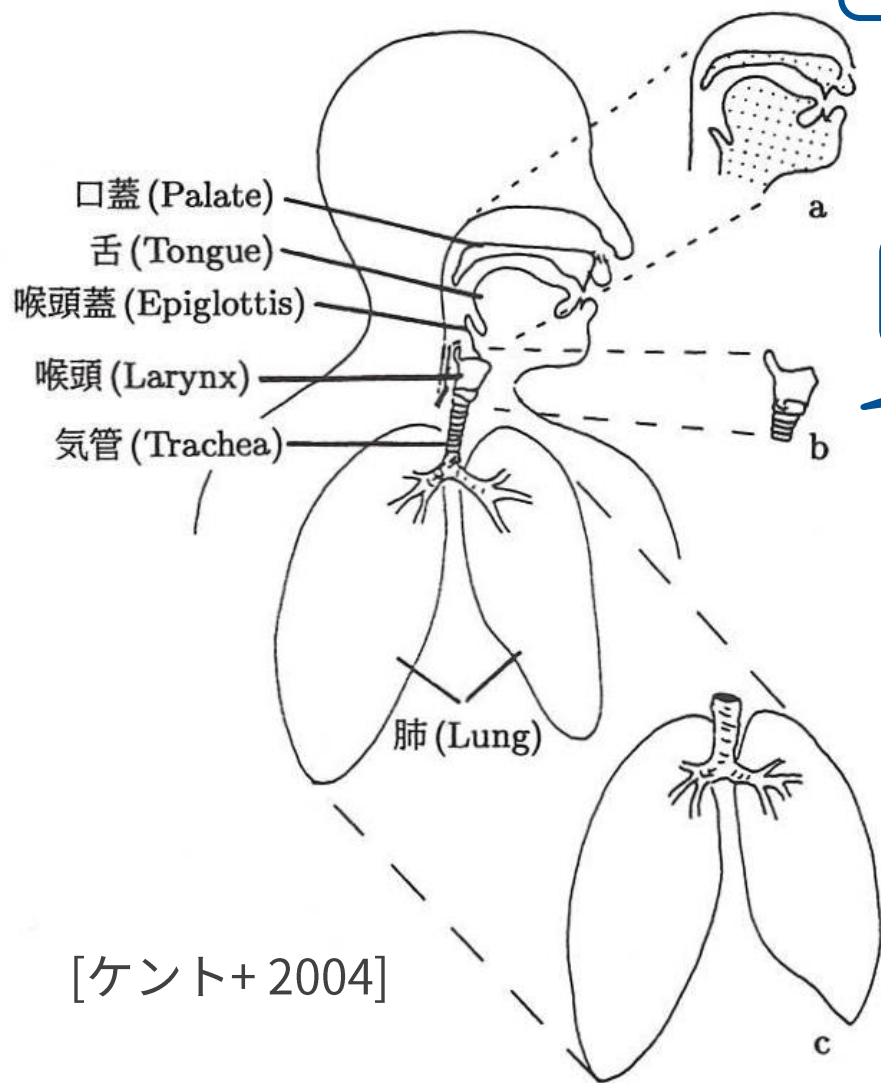
- 行列形式で書くと,

$$\begin{bmatrix} \varphi[0] & \varphi[1] & \cdots & \varphi[L-1] \\ \varphi[1] & \varphi[2] & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \varphi[1] \\ \varphi[L-1] & \cdots & \varphi[1] & \varphi[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi[1] \\ \varphi[2] \\ \vdots \\ \varphi[L] \end{bmatrix}$$

- これをユール・ウォーカー (Yule-Walker) 方程式と呼び, 最適な線形予測係数  $h_l$  はこの方程式の解として得られる。
- 左辺の行列がテプリッツ行列であることから, レビンソン・ダービン (Levinson-Durbin) アルゴリズムと呼ばれる高速解法が使える。
- このような信号のモデル化を自己回帰 (auto-regressive: AR) モデルと呼ぶ。

# 音声の生成モデル

## ➤ 音声の発声機構



声道の特性 → スペクトルの形状

声帯の開閉 → 周期的パルス列

音声は周期的なパルス列と声道形状によるフィルタの畳み込みとしてモデル化できる。

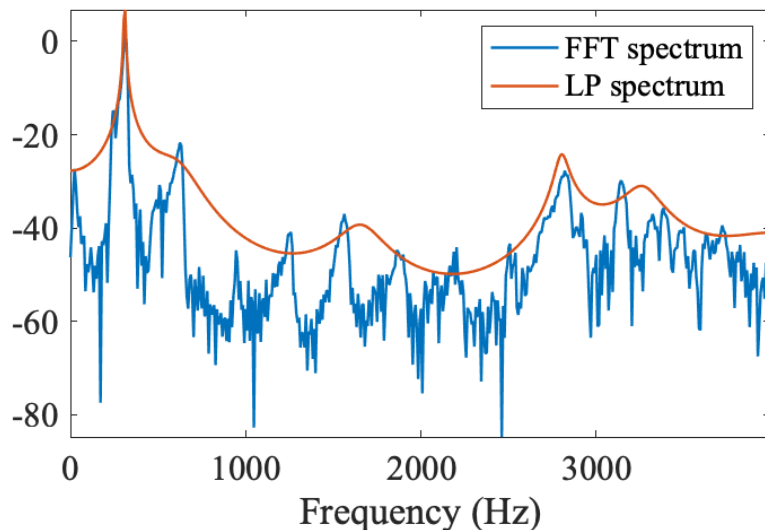
➡ ソース・フィルタモデル

[ケント+ 2004]

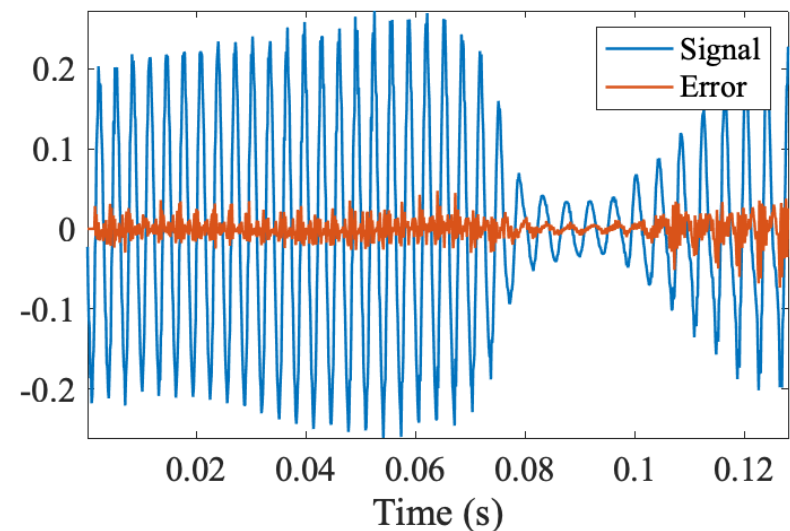
# 音声の生成モデル

- 声道特性は線形予測分析によってよくモデル化できる。

線形予測分析によって得られる  
スペクトル包絡



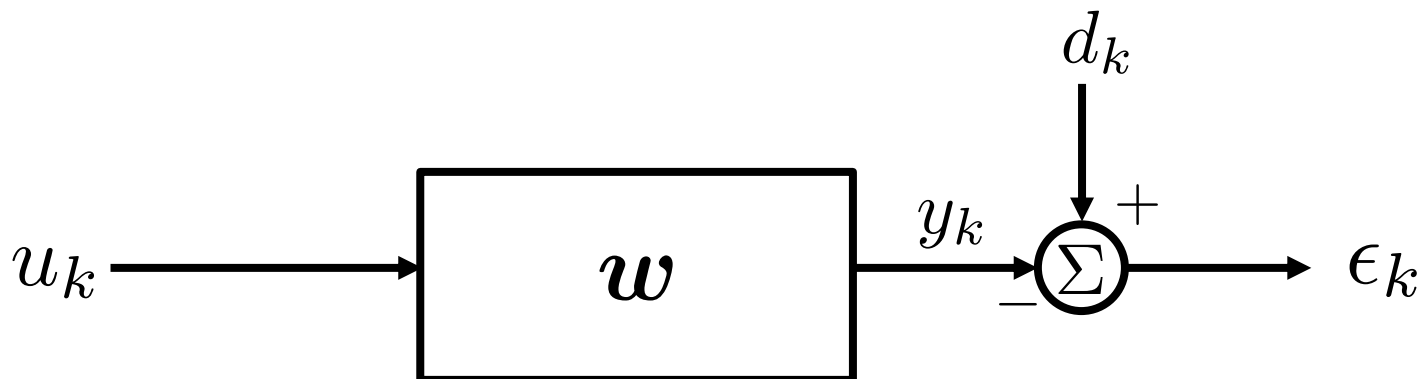
元の音声信号と線形予測分析  
した信号の残差



音声信号のデータ圧縮に現在でも広く利用されている  
(cf. code excited linear prediction coder: CELP)

# 適応フィルタ

- 適応フィルタは、観測信号に対して統計的な学習を行い、所望の信号を抽出することを目的とする。
- 入力信号を  $u_k$  としたときの出力信号  $y_k$  が、所望の信号  $d_k$  にできるだけ一致するようにフィルタ  $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_K]^T$  を求めたい。



# ウィナーフィルタ

- **ウィナーフィルタ**は、線形推定器制約下でのMMSE法を適応フィルタの問題に適用したもの。
- フィルタ係数ベクトルと入力信号ベクトルを以下のように定義する。

$$\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_K]^T$$

$$\mathbf{u}_k = [u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-K+1}]^T$$

- これにより、フィルタ畳み込みがベクトルの内積の形で書ける。

$$\begin{aligned} y_k &= \mathbf{w}^T \mathbf{u}_k \\ &= \sum_{i=1}^K w_i u_{k-i+1} \end{aligned}$$

# ウィナーフィルタ

- 既知の望みの応答を  $d_k$  とすれば，推定誤差は，

$$\epsilon_k = d_k - y_k$$

- ウィナーフィルタでは，以下の二乗誤差期待値をコスト関数とする。

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &= E[|\epsilon_k|^2] \\ &= E[(d_k - \mathbf{w}^\top \mathbf{u}_k)(d_k - \mathbf{w}^\top \mathbf{u}_k)^\top] \\ &= E[d_k^2] - \mathbf{w}^\top E[\mathbf{u}_k d_k] - E[d_k \mathbf{u}_k^\top] \mathbf{w} + \mathbf{w}^\top E[\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^\top] \mathbf{w} \\ &= \sigma_d^2 - \mathbf{w}^\top \mathbf{r}_{ud} - \mathbf{r}_{du} \mathbf{w} + \mathbf{w}^\top \mathbf{R}_u \mathbf{w}\end{aligned}$$

$$\text{ただし, } \begin{cases} \sigma_d^2 := E[d_k^2], & \mathbf{R}_u := E[\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^\top] \\ \mathbf{r}_{ud} := E[\mathbf{u}_k d_k], & \mathbf{r}_{du} := E[d_k \mathbf{u}_k] \end{cases}$$

# ウィナーフィルタ

- コスト関数を  $\boldsymbol{w}$  について微分すると,

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \boldsymbol{w}} = 2(-\boldsymbol{r}_{ud} + \boldsymbol{R}_u \boldsymbol{w})$$

- これを  $\mathbf{0}$  とおくと, 以下の正規方程式 (またはウィナー・ホッフ方程式) が得られる。

$$\boldsymbol{R}_u \boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}_{ud}$$

- したがって, 最適なフィルタは次のように得られる。

$$\hat{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{R}_u^{-1} \boldsymbol{r}_{ud}$$

実用上は逐次的にウィナーフィルタの最適化を得る,  
適応アルゴリズムが用いられる。

# 音声強調

- ノイズを含む音声信号からの音声強調
- 周波数領域での（非因果的な）ウィナーフィルタ

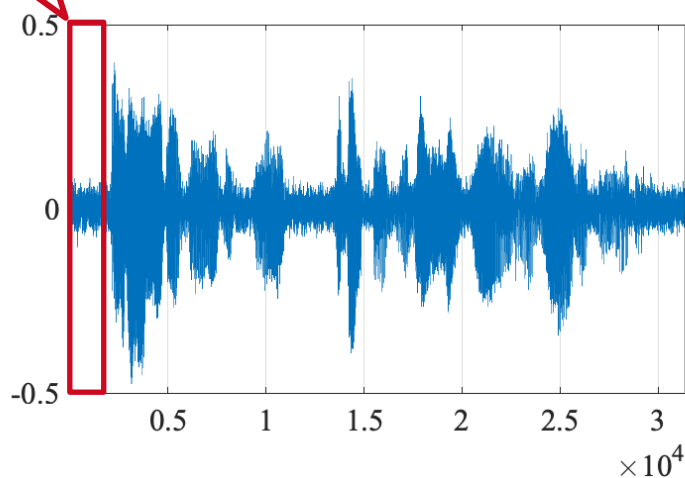
原信号のパワースペクトル密度

$$W(\omega) = \frac{S(\omega)}{S(\omega) + N(\omega)}$$

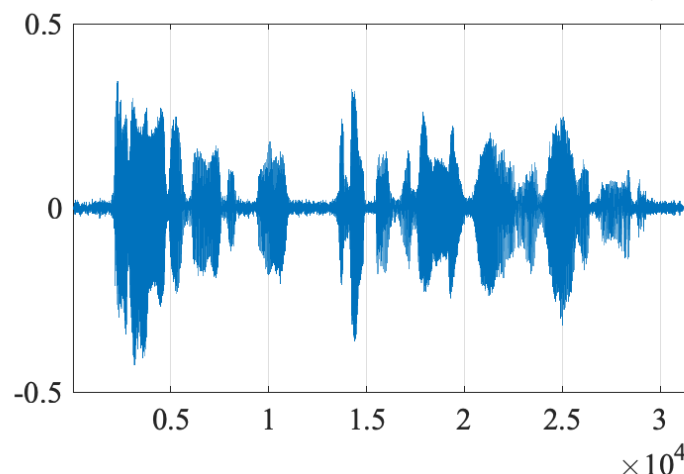
ノイズのパワースペクトル密度

非音声区間で  
SN比を推定

ノイズを含む観測信号



音声強調後の信号



# サンプルプログラム

- Google colaboratory上で動作するウィナーフィルタのサンプルプログラム
  - [https://colab.research.google.com/drive/1XE3F5h1fvy5jpFVWEK8iz\\_WV1vxZMdhF?usp=sharing](https://colab.research.google.com/drive/1XE3F5h1fvy5jpFVWEK8iz_WV1vxZMdhF?usp=sharing)

# 参考文献

1. 小畑, 浜田, 田村, “信号処理入門（計測・制御テクノロジーシリーズ）,” コロナ社, 2007.
2. 眞溪, “ディジタル信号処理工学,” 昭晃堂, 2004.
3. 日本音響学会編, “音響学入門ペディア,” コロナ社, 2017.
4. 関原, “統計的信号処理：信号・ノイズ・推定を理解する,” 共立出版, 2011.
5. パポーリス, “アナログとデジタルの信号解析,” 現代工学社, 1988.
6. Kay, “Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume I,” Prentice Hall, 1993.
7. ケント and リード, “音声の音響分析,” 海文堂, 2004.