応用音響学 第12回
室内音響学と音響数値シミュレーション

小山 翔一

東京大学 大学院情報理工学系研究科 システム情報学専攻

2022/7/8

講義スケジュール

- S セメスター 金曜 2 限 (10:25-12:10) @ 62 講義室
- 日程

4/8	第 1 回	猿渡先生
4/15	第 2 回	
4/22	第 3 回	
5/6	第 4 回	
5/13	第 5 回	
5/20	第 6 回	
5/27	休講	
6/3	第 7 回	小山
6/10	第 8 回	
6/17	第 9 回	
6/24	第 10 回	
7/1	第 11 回	
7/8	第 12 回	
7/22	学期末試験	

講義目的

- **講義前半（猿渡先生担当）**
  - 音声分析，音声符号化，音声認識，音声合成，音響信号処理などに関連する基礎知識について講義する。応用として，携帯電話や MP3 などの音声音楽情報圧縮技術や音声認識技術・音声合成システムなどがある。統計的信号処理の基礎，スペクトル解析，パターン認識，確率モデル，統計学習，最適解探策などの基本概念とアルゴリズムを理解し，これらの技術の基礎になる知識と概念の習得を目指す。
- **講義後半（小山担当）**
  - 音響現象の数理的なモデリング方法を理解することを目的とし，音波の伝播，反射，回折，散乱などの現象を数学的に記述するための基礎事項について講義する。応用として，音源位置の推定や音場の可視化，音の VR/AR や騒音・振動制御，音響数値シミュレーションなどがある。これらの基本概念を理解することで，様々な波動場の計測・制御技術の基礎となる知識の習得を目指す。

講義後半の概要

- 講義内容（予定）
  - 6/3: 音波の伝播
  - 6/10: 音響管・自由空間中の音波
  - 6/17: 音場の境界値積分表現
  - 6/24: フーリエ音響学 (1)
  - 7/1: フーリエ音響学 (2)
  - 7/8: 室内音響学と音響数値シミュレーション
- 参考文献
  - 安田仁彦, ”機械音響学,” コロナ社, 2004.
  - E. G. Williams, *”Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography,”* Academic Press, 1999.

講義資料と成績評価

- 講義資料
  - ITC-LMS に前日までにアップロード予定
  - `https://www.sh01.org/ja/teaching/`
    あるいはシステム 1 研のウェブサイトからもたどれます
- 成績評価
  - 7/22 学期末試験

本日の目次

1. **室内音響学と音響数値シミュレーション**
   - 波動論による室内音場の表現
   - 幾何音響解析による音響数値シミュレーション
   - 波動音響解析による音響数値シミュレーション

本日の目次

1. **室内音響学と音響数値シミュレーション**
   - 波動論による室内音場の表現
   - 幾何音響解析による音響数値シミュレーション
   - 波動音響解析による音響数値シミュレーション

波動論による室内音場の表現

- 音場の境界値積分表現を応用し，周波数領域において室内音場を解析することを考える。
- 境界条件が室壁面の媒質の固有音響インピーダンス Z_{wall} として与えられるとする。
- 音圧 p と音響インピーダンス密度 Z_{wall} との関係を求めたい。3 次元音場の運動方程式を思い出すと，

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = -\nabla p(\boldsymbol{r}, t)$$

ここで ρ は空気の密度である。

- よって周波数領域においては，以下が成り立つ。

$$\mathrm{j}\omega\rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, \omega) = \nabla p(\boldsymbol{r}, \omega)$$

波動論による室内音場の表現

- $\boldsymbol{n}$ 方向に関する音圧と粒子速度の関係は，運動方程式の両辺について $\boldsymbol{n}$ との内積をとって，

$$\mathrm{j}k\rho c\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}$$

- 壁面向きの法線方向を $\boldsymbol{n}$ とすれば，境界条件とした与えた音響インピーダンス密度 Z_{wall} は，

$$Z_{\mathrm{wall}}=\frac{p}{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}}$$

したがって，

$$p=Z_{\mathrm{wall}}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{\mathrm{j}k}\frac{Z_{\mathrm{wall}}}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}$$

ここで ρc は空気の固有音響インピーダンスであることに注意。

波動論による室内音場の表現

- ここで，$Z_{\mathrm{wall}}/\rho c$ を（垂直入射）**比音響インピーダンス比**と呼び，これを Z とおく。

$$p = \frac{Z}{\mathrm{j}k}\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}$$

これは音圧に関する Robin 境界条件の形になっている。$Z \to 0$ とすれば Dirichlet 境界条件，$Z \to \infty$ とすれば Neumann 境界条件に一致する。

- ただし壁面における比音響インピーダンス比は，法線方向成分の粒子速度に対してのみ影響すると仮定していることに注意。（局所作用の仮定）

波動論による室内音場の表現

- 直方体形状の室内音場について考えるため，固有関数展開による音場の表現を用いる。(cf. 第 3 回の資料)
- 壁面での比音響インピーダンス比が Z で与えられているとし，領域 Ω 内の音源分布を $Q(\boldsymbol{r})$ とすれば，音圧分布 $p(\boldsymbol{r})$ は以下の非斉次 Helmholtz 方程式と Robin 境界条件を満たす。

$$\begin{cases} \nabla^2 p(\boldsymbol{r}) + k^2 p(\boldsymbol{r}) = -Q(\boldsymbol{r}) \\ p(\boldsymbol{r}) = \dfrac{Z}{\mathrm{j}k} \dfrac{\partial p(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{n}} \quad (\boldsymbol{r} \in \partial\Omega) \end{cases}$$

ただし $\partial\Omega$ は領域 Ω の境界面（壁面）である。

波動論による室内音場の表現

- 領域 Ω の 3 次元固有関数 $\Psi_n(\boldsymbol{r})$ が既知であるとし，この固有関数は先ほどの Robin 境界条件を満たし，$k_n = \omega_n/c$ で与えられる固有周波数を持つものとする。ここで，n は固有周波数の番号である。
- これらの固有関数が完全直交系をなすと仮定すると，領域 Ω 内の任意の音圧分布が固有関数の線形和として表現できる。

$$p(\boldsymbol{r}) = \sum_n A_n \Psi_n(\boldsymbol{r})$$

ただし，Ψ_n は以下を満たす。

$$\int_\Omega \Psi_n \Psi_m^* \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \begin{cases} K_n, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

波動論による室内音場の表現

- 同様にして，音源分布 $Q(\boldsymbol{r})$ も $\Psi_n(\boldsymbol{r})$ で展開できる。

$$Q(\boldsymbol{r}) = \sum_n B_n \Psi_n(\boldsymbol{r})$$

$$B_n = \frac{1}{K_n} \int_\Omega \Psi_n(\boldsymbol{r})^* Q(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

- これらを非斉次 Helmholtz 方程式に代入すれば，

$$\sum_n A_n (\nabla^2 + k^2) \Psi_n(\boldsymbol{r}) = -\sum_n B_n \Psi_n(\boldsymbol{r})$$

- Ψ_n は領域 Ω の固有関数なので，斉次 Helmholtz 方程式を満たす固有値 k_n を持つ。

$$\nabla^2 \Psi_n + k_n^2 \Psi_n = 0$$

波動論による室内音場の表現

- これを先ほどの式に代入すれば，$A_n = -\frac{B_n}{k^2 - k_n^2}$ となるので，

$$p(\boldsymbol{r}) = \sum_n \frac{B_n \Psi_n(\boldsymbol{r})}{k_n - k^2}$$

- もし音源分布がデルタ関数 $\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ で表されるとすると，

$$B_n = \frac{1}{K_n} \Psi_q(\boldsymbol{r}')^*$$

となるので，

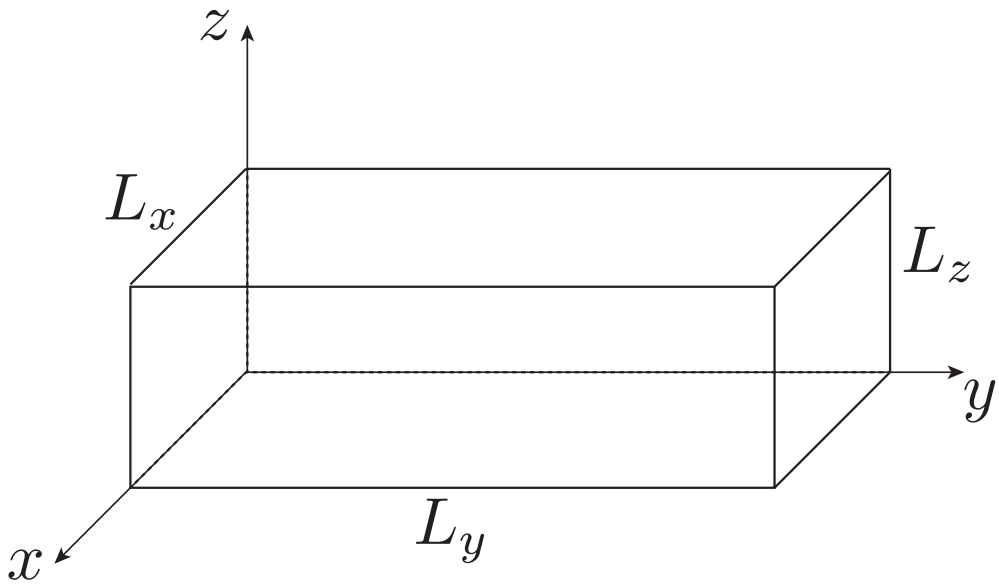
$$A_n = -\frac{\Psi_n(\boldsymbol{r}')^*}{(k^2 - k_n^2) K_n}$$

- このときの $p(\boldsymbol{r})$ は Green 関数であり，

$$G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}') = \sum_n \frac{\Psi_n(\boldsymbol{r}) \Psi_n(\boldsymbol{r}')^*}{(k_n^2 - k^2) K_n}$$

剛体壁を有する直方体の室内音場

- 具体的な例として，直方体の室内音場を扱う。まずは壁面が剛体であるとし，比音響インピーダンス比 $Z = \infty$（Neumann 境界条件）とする。
- 直方体室の大きさは，下図のように L_x，L_y，L_z とし，直交座標系の各軸を直方体の辺に沿ってとり，原点を角にとる。



剛体壁を有する直方体の室内音場

- 音圧 $p(x,y,z)$ が $p(x,y,z) = p_x(x)p_y(y)p_z(z)$ として変数分離できるとする。
- このとき，$p_x(x)$ は以下の微分方程式と境界条件を満たす。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 p_x}{\mathrm{d}x^2} + k_x^2 p_x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad\qquad \text{for } \ x = 0 \ \text{ and } \ x = L_x \end{cases}$$

- p_y，p_z についても同様の式が成り立ち，それぞれの微分方程式で現れる定数を k_y，k_z とすれば，これらの定数に関して以下が成り立つ。

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

剛体壁を有する直方体の室内音場

- 一般解は，任意定数 A，B を用いて以下のように書ける。

$$p_x(x) = A\cos k_x x + B\sin k_x x$$

- 境界条件より，$B = 0$。また，$\sin k_x L_x = 0$ より，$k_x L_x$ は π の整数倍でなければならない。よって，k_x は非負の整数 n_x を用いて，以下のように書ける。

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L_x}$$

k_y，k_z に関しても同様にして，

$$k_y = \frac{n_y \pi}{L_y}, \quad k_z = \frac{n_z \pi}{L_z}$$

剛体壁を有する直方体の室内音場

- 以上により，剛体壁の直方体室に関する固有関数が得られる。

$$p_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = C \cos\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right) \cos\left(\frac{n_z \pi z}{L_z}\right)$$

ここで，C は任意定数である。

- また固有値は，

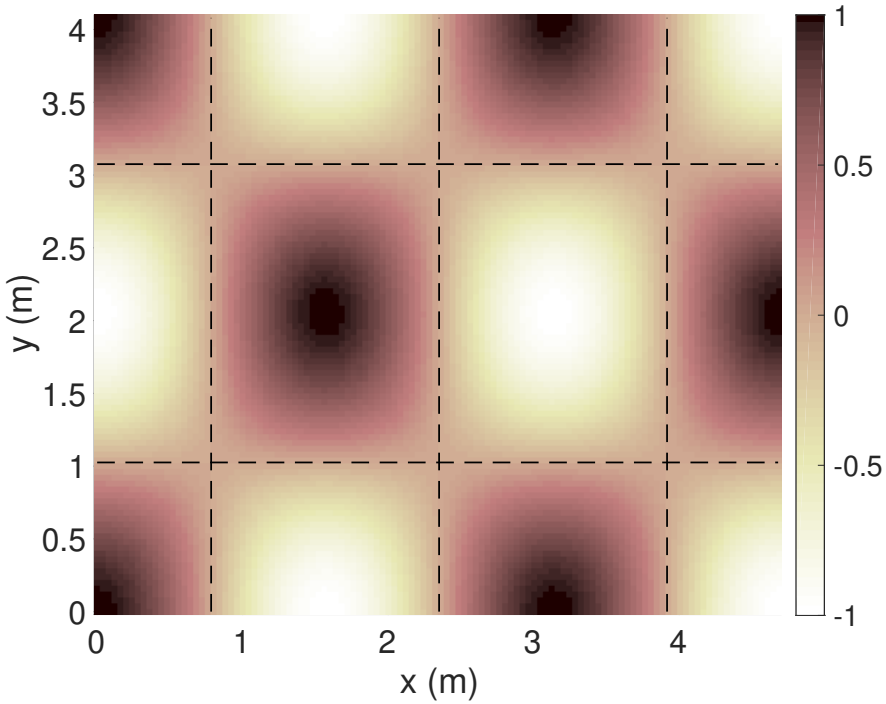
$$k_{n_x n_y n_z} = \pi \sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2}$$

となる。

- これは 3 次元の定在波を表し，音圧が 0 となる節を結んだ平面の集合をノード平面 (nodal plane) と呼ぶ。直方体の室以外では一般に平面にならないため，ノード表面 (nodal surface) と呼ぶ。

剛体壁を有する直方体の室内音場

- 室の大きさが $L_x = 4.7\ \mathrm{m}$，$L_y = 4.1\ \mathrm{m}$，$L_z = 3.1\ \mathrm{m}$ の場合に，$n_x = 3$，$n_y = 2$ に関する $z = 0$ 上の音圧分布。破線はノード平面を表す。



- cf. クラドニ図形（２次元振動板の固有関数の可視化。弾性体なので支配方程式は異なる。）

剛体壁を有する直方体の室内音場

- 固有周波数は，以下の式で与えられる。

$$f_{n_x n_y n_z} = \frac{c}{2\pi} k_{n_x n_y n_z}$$

- 先ほどの例で，$c = 340\ \mathrm{m/s}$ の場合の固有周波数を表で示す。

f_n	n_x	n_y	n_z	f_n	n_x	n_y	n_z
36.17	1	0	0	90.47	1	2	0
41.46	0	1	0	90.78	2	0	1
54.84	0	0	1	99.42	0	2	1
55.02	1	1	0	99.80	2	1	1
65.69	1	0	1	105.79	1	2	1
68.55	0	1	1	108.51	3	0	0
72.34	2	0	0	109.68	0	0	2
77.68	1	1	1	110.05	2	2	0
82.93	0	2	0	115.49	1	0	2
83.38	2	1	0	116.16	3	1	0

カッツの太鼓の問題 🤔

- Kac は “Can one hear the shape of the drum?” [Kac 1966] という有名な論文で，異なる形状の２つの膜は，必ず異なる共振周波数を持つか，という疑問を投げかけた。
- 後に Gordon らによって否定された [Gordon+ 1996]。異なる形状で同じ共振周波数を持つ２つの膜の例。

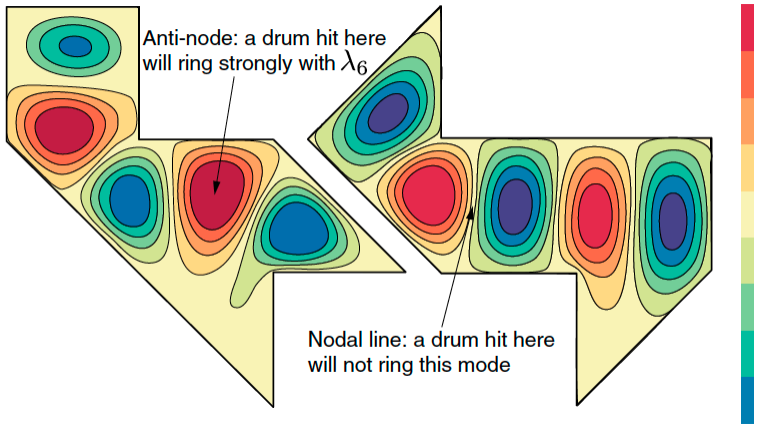


Figure: [Dokmanić+ 2013] より。
http://www.math.udel.edu/ driscoll/research/drums.html も参照。

- 最近では，時間領域の到来時間差を使って，音から室形状を推定する研究も行われている [Dokmanić+ 2013]。

インピーダンス境界を有する直方体の室内音場

- 壁面の境界条件が比音響インピーダンス比 Z として与えられる場合を考える。
- 剛壁の場合と同様に，$p(x,y,z) = p_x(x)p_y(y)p_z(z)$ として変数分離して考えれば，$p_x(x)$ は以下の微分方程式と境界条件を満たす。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 p_x}{\mathrm{d}x^2} + k_x^2 p_x = 0 & \\ Z\dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{j}kp_x & \text{for } \ x = 0 \\ Z\dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}x} = \mathrm{j}kp_x & \text{for } \ x = L_x \end{cases}$$

p_y，p_z に関しても同様の式が成り立つ。

- ここでは一般解を以下のように書く。

$$p_x(x) = C\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x} + D\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_x x}$$

インピーダンス境界を有する直方体の室内音場

- 一般解を境界条件の式に代入すれば，以下の方程式を得る。

$$C(k_x Z - k) - D(k_x Z + k) = 0$$
$$C(k_x Z + k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x L_x} - D(k_x Z - k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_x L_x} = 0$$

- この式が非零の解を持つためには，係数の行列式が 0 となることが必要。これにより，k_x の取りうる値は，

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_x L_x} = \pm\frac{k_x Z + k}{k_x Z - k}$$

- $u = k_x L_x/2$ として，u に関して解くと，

$$\tan u = \mathrm{j}\frac{kL_x}{2uZ}, \qquad \tan u = \mathrm{j}\frac{2uZ}{kL_x}$$

この式は一般には数値的に解くことが必要になる。

インピーダンス境界を有する直方体の室内音場

- 一旦 k_x が決まれば，定数 C と D の比は，

$$\frac{C}{D} = \frac{k_x Z + k}{k_x Z - k} = \pm \mathrm{e}^{\mathrm{j} k_x L_x}$$

- 結果的に，$p_x(x)$ は以下のようになる。

$$p_x(x) \propto \begin{cases} \cos k_x \left(x + \dfrac{L_x}{2} \right) \\ \sin k_x \left(x + \dfrac{L_x}{2} \right) \end{cases}$$

- 固有関数はこれと同様な形の 3 つの関数の積として与えられる。

インピーダンス境界を有する直方体の室内音場

- 壁面が剛体に近い場合，つまり比音響インピーダンス比が $|Z| \gg 1$ である場合を考える。
- 指数関数の級数展開，および $k \ll k_x Z$ を用いて，

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_x L_x} \approx \pm \mathrm{e}^{-\frac{2k}{k_x Z}}$$

- したがって，任意の整数 n_x を用いて，k_x は以下を満たす。

$$\begin{aligned} k_x &\approx \frac{n_x \pi}{L_x} + \mathrm{j}\frac{2k}{k_x Z L_x} \\ &\approx \frac{n_x \pi}{L_x} + \mathrm{j}\frac{2k}{n_x \pi Z} \end{aligned}$$

  第２式で第２項が第１項より十分小さいとし，k_x と $n_x\pi/L_x$ を置き換えた。
- この結果から，次数 n_x が大きくなるほど，k_x は $Z = \infty$ となる理想的な剛体壁の場合に近づくことがわかる。

インピーダンス境界を有する直方体の室内音場

- 比音響インピーダンス比 Z が純虚数の場合，k_x は実数となり，壁面でのエネルギ損失は生じない。反射率の定義を思い出すと，

$$R = \frac{Z_{\mathrm{wall}} - \rho c}{Z_{\mathrm{wall}} + \rho c} = \frac{Z - 1}{Z + 1}$$

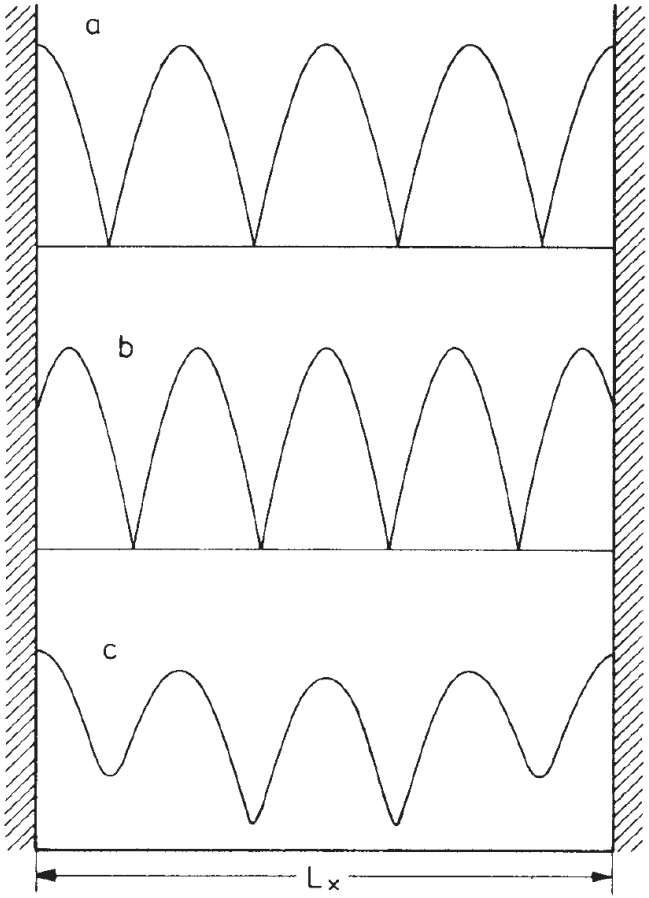
  であり，Z が純虚数の場合，$|R|$ は 1 になる。
- 比音響インピーダンス比 Z が実部に値を持つ場合，k_x は複素数となり，壁面でのエネルギ損失が生じる。このとき，k_x の虚部は減衰定数に対応する。
- k_x の可能な値を k_{xn_x} とすれば，固有周波数は剛壁の場合と同様に，

$$k_{n_x n_y n_z} = \sqrt{k_{xn_x}^2 + k_{yn_y}^2 + k_{zn_z}^2}$$

  となる。

インピーダンス境界を有する直方体の室内音場

- $n_x = 4$ のときの 1 次元の固有関数の絶対値を $Z = \infty$，$Z = \mathrm{j}$，$Z = 2$ の場合に関してプロット。[Kuttruff 1991] より。



インピーダンス境界を有する直方体の室内音場

- 固有関数による音場の展開表現において，$k_n = \omega_n/c + \mathrm{j}\delta_n/c$ とすれば，$\omega_n \gg \delta_n$ を仮定して，

$$p \approx \sum_n \frac{C_n}{\omega^2 - \omega_n^2 - 2\mathrm{j}\delta_n\omega_n}$$

  の形でかける。
- 分母第３項の ω_n を ω と置き換えて絶対値をとれば，

$$\frac{|A_n|}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_n^2)^2 + 4\omega^2\delta_n^2}}$$

  これは共鳴周波数 ω_n，減衰定数 δ_n を持つ共鳴系を結合したものに等しい。
- この共鳴曲線の半値幅は，δ_n/π となる。

インピーダンス境界を有する直方体の室内音場

- 周波数が高くなるほど，周波数軸上の固有周波数の平均間隔が小さくなる。平均的な共鳴の半値幅が固有周波数の間隔よりも大きい場合，共鳴のピークが重なり合って，個々のピークを分離できなくなる。
- 共鳴半値幅内に平均で３個の固有周波数が含まれる周波数が，分離できる限界の周波数とされ，**Schroeder 周波数**と呼ばれる。

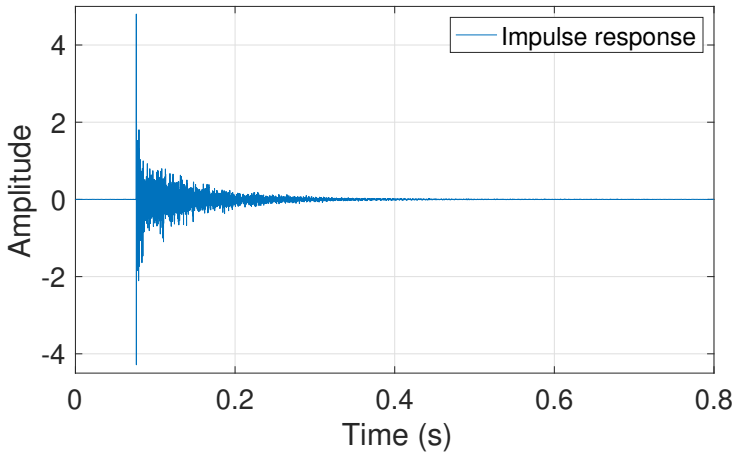
$$f_{\mathrm{sch}} \approx 2000\sqrt{\frac{T}{V}}$$

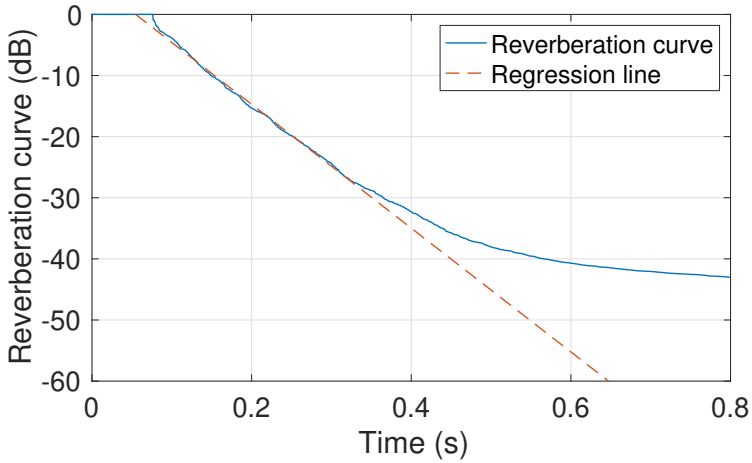
ここで T は残響時間，V は室容積を表す。

- Schroeder 周波数以上では固有関数展開による解析は困難なため，幾何的あるいは統計的な解析方法を用いる場合が多い。

インピーダンス境界を有する直方体の室内音場

- **残響時間**は，定常音を室内に放射して平衡状態に達したのちに音を停止し，室内の音響エネルギー密度が 60 dB 減衰するまでの時間として定義されている。
- 室で計測したインパルス応答の 2 乗積分値がよく用いられ，これを**残響減衰曲線**と呼ぶ。
- インパルス応答と残響減衰曲線の例。





インパルス応答測定の実際 🤔

- 音響伝達系のインパルス応答を測定したい場面は多いが，スピーカからデルタ関数としてパルス音を出力した場合のセンサの観測値を用いても，出力信号のパワーが極めて小さいことから，測定の SN 比が低くなってしまう。
- パルス音を使わずとも，対象の周波数帯域において十分大きな出力パワーを持ち，かつ測定の非線形誤差を抑えられるような信号を用いれば，インパルス応答測定の SN 比を改善できる。
- デルタ関数的な信号の代替として用いられる出力信号はいくつかあるが，以下の 2 つに大別される。
  - M 系列 (Maximum length sequence: MLS)
  - Swept-sine 信号（または Time-Stretched Pulse: TSP とも呼ぶ）

インパルス応答測定の実際 🤔

- M 系列
  - 擬似乱数系列であり，白色 Gauss 雑音に似た統計的性質を持つ。
- Swept-sine 信号
  - 周波数が時間とともに上昇あるいは下降するチャープ信号。
  - 瞬時周波数が線形に変化するものを Linear swept-sine，指数的に変化するものを Exponential swept-sine と呼ぶ。

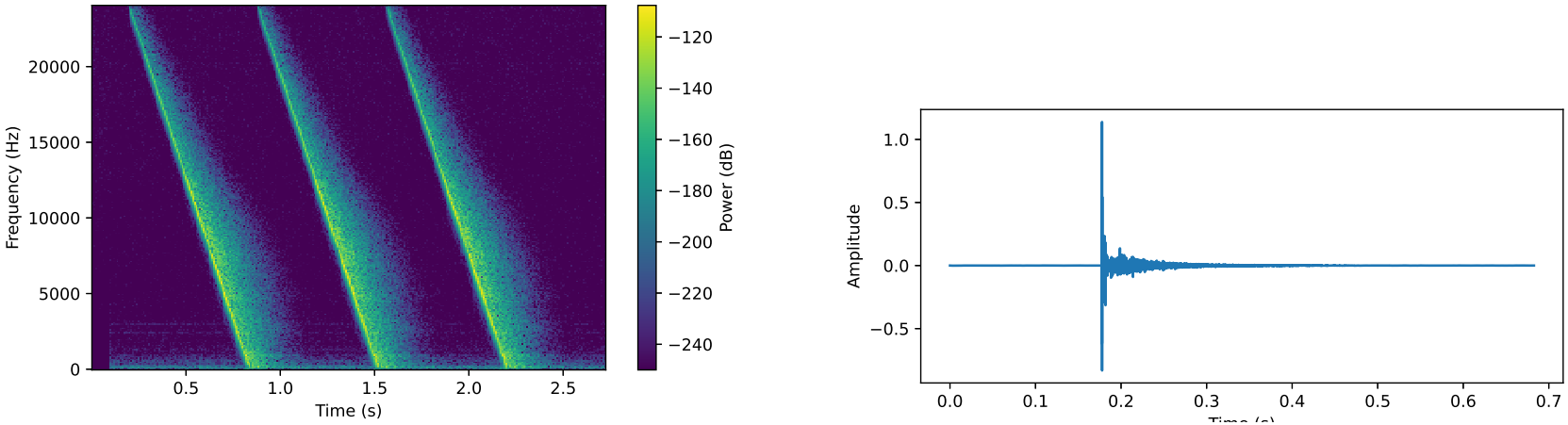


Figure: Swept-sine 信号のスペクトログラムとインパルス応答

本日の目次

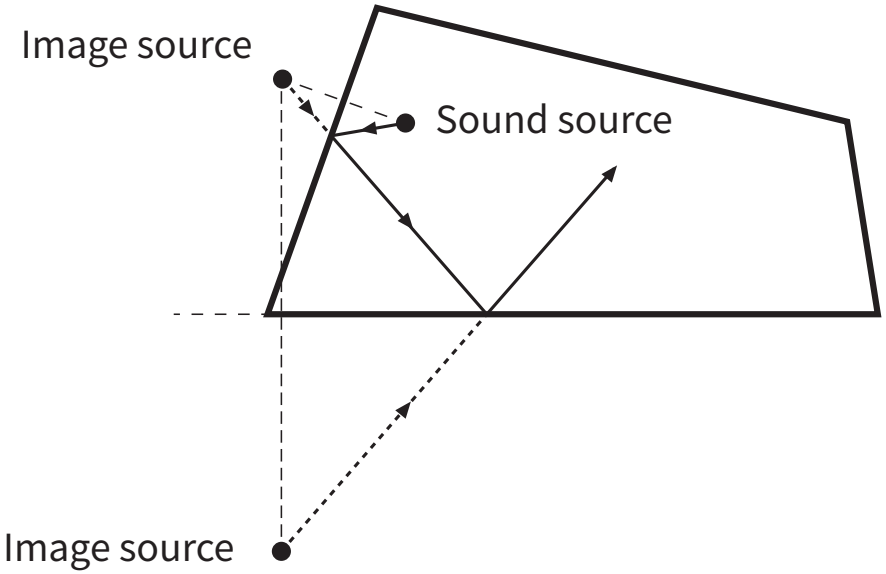
1. 室内音響学と音響数値シミュレーション
   - 波動論による室内音場の表現
   - 幾何音響解析による音響数値シミュレーション
   - 波動音響解析による音響数値シミュレーション

幾何音響解析による音響数値シミュレーション

- 数値的な音響現象の解析において，波動性を考慮した方法は計算負荷が大きく，幾何的な振る舞いとして近似することが現在でもよく行われる。
- 幾何音響学に基づくシミュレーション法には，大きく分けて**虚像法**（あるいは鏡像法）と**音線法**がある。
- ここではそれぞれの手法の概要のみ触れることにする。

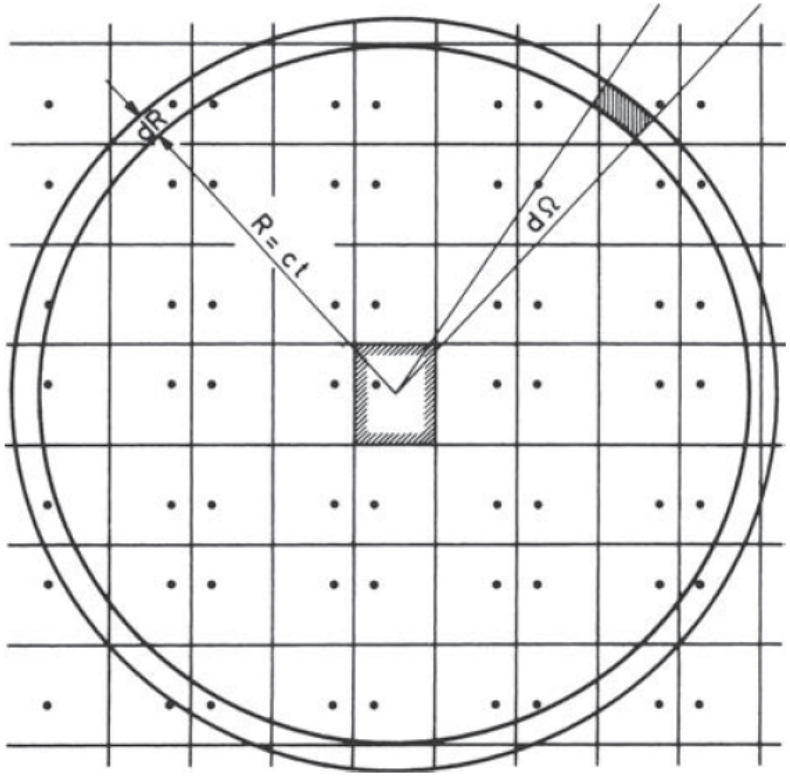
虚像法

- 虚像法では，壁面での音波の反射を，その壁面に関する鏡像位置にある仮想的な音源（虚像音源）による音波と捉える。
- 多重反射については，ある虚像音源の別の壁面関する鏡像位置の音源を考えればよい。これにより，残響音場を，自由空間中に多数の虚像音源が存在するような音場としてみなす。
- 各壁面の吸音率あるいは反射率を設定し，反射によるエネルギ減衰を考慮することも可能。



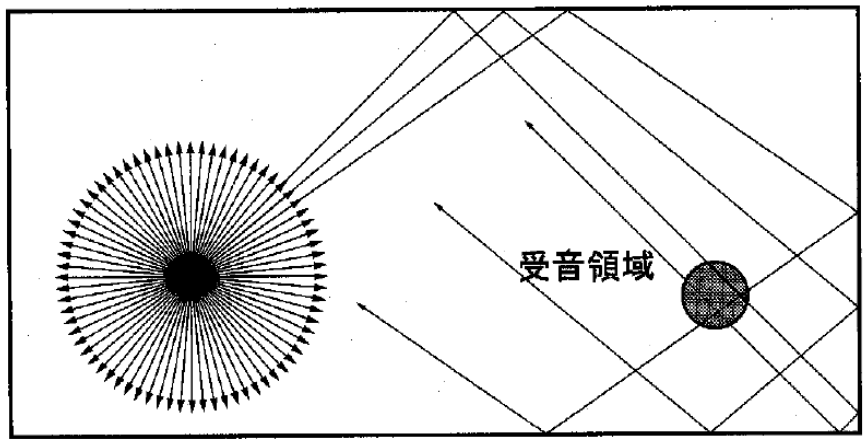
虚像法

- 直方体形状の室の場合は比較的容易に虚像音源の分布を得ることが可能。図は [Kuttruff 1991] より。
- 音響信号処理の研究では，その簡便さから非常によく用いられる。



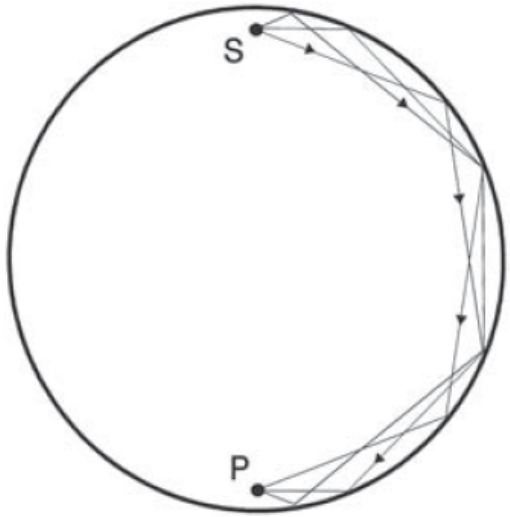
音線法

- Computer Graphics でよく用いられるレイトレーシングを音に適用したもの。
- 音の伝播を，あるエネルギを持った仮想的な音粒子が空間内を進行すると捉える。
- 音源から放射される音粒子の軌跡（音線）を追跡し，受音領域内を通過する音線のエネルギを計算する。
- 音線が壁面と衝突する際に，吸音率によるエネルギ減衰を考慮することもできる。
- 図は [尾本 2006] より。



音線法

- 音線法は厳密な波動方程式解を導くような方法ではないが，音響現象の大雑把な振る舞いを理解するのを助ける。
- 例えば，楕円形のホールの壁近くで小さな音を出すと，壁際ではっきりと聞くことができる，囁きの回廊（Whispering gallery）と呼ばれる現象など。（図は [Kuttruff 1991] より）
- 囁きの回廊がある建物としてはロンドンにあるセント・ポール大聖堂が有名。



囁きの回廊 🤔

Figure: https://ja.wikipedia.org/wiki/ささやきの回廊 より

鳴き竜 🤔

Figure: https://www.onosokki.co.jp/HP-WK/nakaniwa/keisoku/nakiryu.htm より

本日の目次

1. 室内音響学と音響数値シミュレーション
   - 波動論による室内音場の表現
   - 幾何音響解析による音響数値シミュレーション
   - 波動音響解析による音響数値シミュレーション

波動音響解析による音響数値シミュレーション

- 幾何音響シミュレーションは，計算時間が比較的小さいというメリットがある一方で，波動性が考慮されないため，特に低い周波数において実際との乖離が大きい。
- 波動性を考慮した音響数値シミュレーション法としてよく知られているのは以下の３つ。
  - 有限要素法（Finite Element Method: FEM）
  - 境界要素法（Boundary Element Method: BEM）
  - 時間領域有限差分法（Finite-Difference Time-Domain method: FDTD method）
- 以降，これらの手法の概要を説明する。

有限要素法（FEM）

- 有限要素法は，領域全体を有限個の要素に分割し，**弱形式**と呼ばれる積分表現の離散化によって得られる連立方程式を解く方法である。
- 長所として，
  - 境界に合わせて要素分割を行うことで，複雑な形状にも対応できる。
  - 領域内部の解析が容易。
  - 固有値解析が可能であり，室のモードによる説明ができる。
- 短所として，
  - 領域全体を分割するメッシュの生成が大変。
  - 大規模な解析では計算機負荷が大きい。

有限要素法（FEM）

- FEM は，対象の偏微分方程式を離散化したときの誤差を最小にするための重み関数を乗じ，領域全体での積分が 0 になるようにする，重み付き残差法に基づく。
- 音源分布を $Q(\boldsymbol{r})$ とする非斉次 Helmholtz 方程式に対して重み関数 $w(\boldsymbol{r})$ を乗じ，領域 Ω 全体にわたって積分する。

$$\int_\Omega \left(\nabla^2 p(\boldsymbol{r}) + k^2 p(\boldsymbol{r})\right) w(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_\Omega Q(\boldsymbol{r}) w(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

- 左辺第１項に対して Green の第１定理を適用すると，

$$\int_\Omega \nabla^2 p(\boldsymbol{r}) w(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_\Omega \nabla p(\boldsymbol{r}) \cdot \nabla w(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{n}} w(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

となる。

有限要素法（FEM）

- 最初の式に代入すれば，

$$-\int_\Omega \nabla p(\boldsymbol{r})\cdot\nabla w(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial p(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{n}}w(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}+k^2\int_\Omega p(\boldsymbol{r})w(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_\Omega Q(\boldsymbol{r})w(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

- 音圧と比音響インピーダンス比との関係 $p=\frac{Z}{\mathrm{j}k}\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}$ より，

$$\int_\Omega \nabla p(\boldsymbol{r})\cdot\nabla w(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}-\mathrm{j}k\int_{\partial\Omega}\frac{1}{Z}p(\boldsymbol{r})w(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}-k^2\int_\Omega p(\boldsymbol{r})w(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_\Omega Q(\boldsymbol{r})w(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

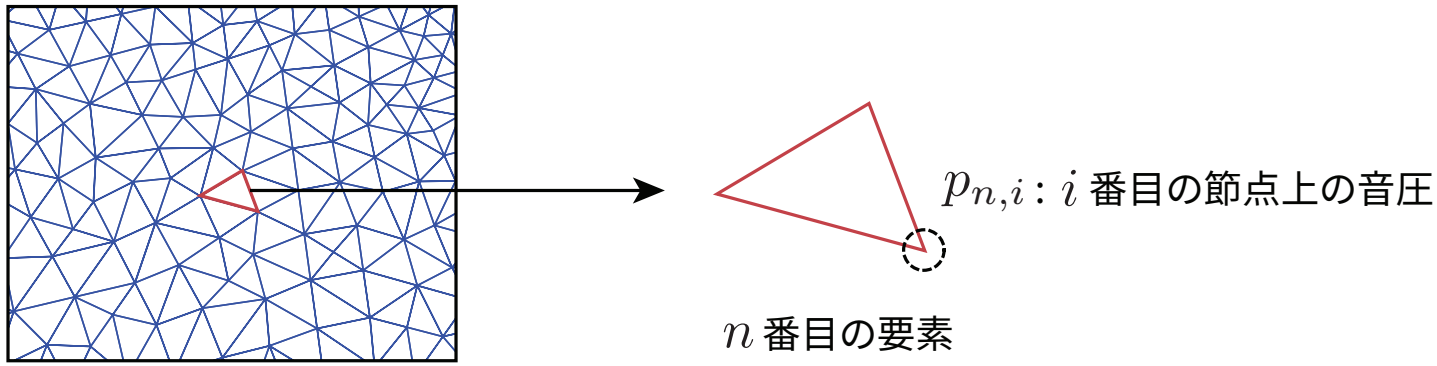
この式を基礎積分方程式として離散化によって連立方程式を導く。

有限要素法（FEM）

- 領域を N 個に分割し，n 番目の要素内でのテスト関数を以下のように設定する。

$$p = \sum_{i=1}^{I} N_i p_{n,i}$$

ここで $p_{n,i}$ は n 番目の要素の i 番目の節点での音圧，N_i は内挿関数，I は要素の節点数。



有限要素法（FEM）

- Galerkin 法では，重み関数 w とテスト関数を同一のものとする。

$$w = \sum_{i=1}^{I} N_i p_{n,i}$$

- 先程の式に代入し，n 番目の要素に関して行列の形式で書き換えると，

$$\left(\boldsymbol{K}_n - \mathrm{j}k\boldsymbol{C}_n - k^2\boldsymbol{M}_n\right)\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{q}_n$$

ここで，

$$\boldsymbol{K}_n = \begin{bmatrix} \int_\Omega \nabla N_1 \cdot \nabla N_1 \mathrm{d}\boldsymbol{r} & \cdots & \int_\Omega \nabla N_1 \cdot \nabla N_I \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_\Omega \nabla N_I \cdot \nabla N_1 \mathrm{d}\boldsymbol{r} & \cdots & \int_\Omega \nabla N_I \cdot \nabla N_I \mathrm{d}\boldsymbol{r} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_n = \begin{bmatrix} p_{n,1} & \cdots & p_{n,I} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

有限要素法（FEM）

- また，

$$\boldsymbol{M}_n = \begin{bmatrix} \int_\Omega N_1 N_1 \mathrm{d}\boldsymbol{r} & \cdots & \int_\Omega N_1 N_I \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_\Omega N_I N_1 \mathrm{d}\boldsymbol{r} & \cdots & \int_\Omega N_I N_I \mathrm{d}\boldsymbol{r} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_n = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} \int_{\partial\Omega} N_1 N_1 \mathrm{d}\boldsymbol{r} & \cdots & \int_{\partial\Omega} N_1 N_I \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\partial\Omega} N_I N_1 \mathrm{d}\boldsymbol{r} & \cdots & \int_{\partial\Omega} N_I N_I \mathrm{d}\boldsymbol{r} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{q}_n = \begin{bmatrix} Q_1 \int_\Omega N_1 \mathrm{d}\boldsymbol{r} & \cdots & Q_I \int_\Omega N_I \mathrm{d}\boldsymbol{r} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

である。

有限要素法（FEM）

- N 個の要素全てに関する方程式を考える。

$$\left(\boldsymbol{K} - \mathrm{j}k\boldsymbol{C} - k^2\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{K}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{K}_N \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{M}_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{C}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{C}_N \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_N \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 & \cdots & \boldsymbol{q}_N \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

- ここで，重複した節点に対応する要素は重ね合わせた形にする。

有限要素法（FEM）

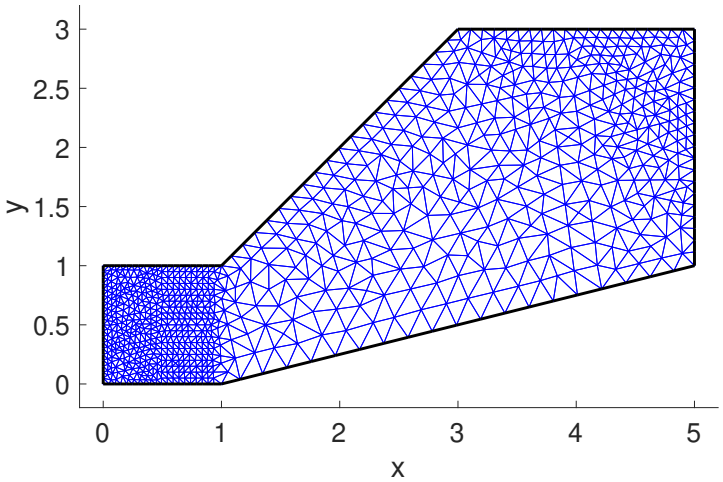
- 最終的に，各節点の音圧は以下のように求められる。

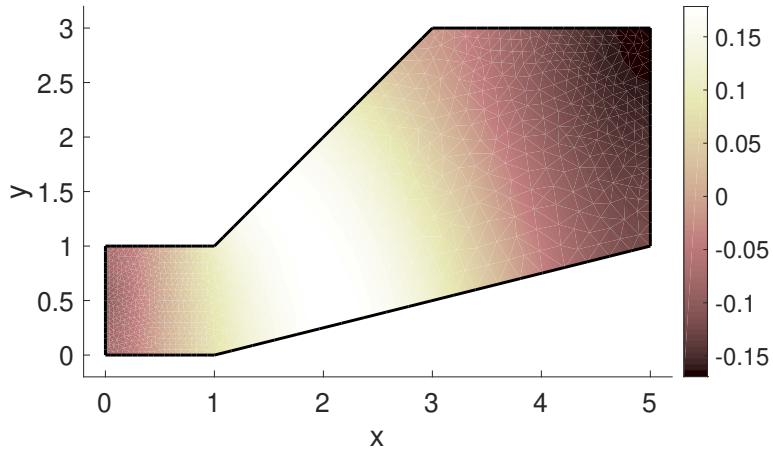
$$\boldsymbol{p} = \left(\boldsymbol{K} - \mathrm{j}k\boldsymbol{C} - k^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}$$

- 問題が大規模になるとこの行列のサイズが非常に大きくなるが，疎行列となるため効率的な逆行列計算を行うことができる。
- 実装がやや複雑だが，よく使われているツールがいくつか存在する。個人的によく使うのは FreeFem++ (`https://freefem.org/`)。

有限要素法（FEM）

- FreeFem++を用いた FEM による２次元音場の数値計算例。左がメッシュ，右が音圧分布。
- Neumann 境界条件の下で，$x = 0$ の壁面に $y(1 - y)$ として音源分布を与えた。波数 $k = 1.0$ とした。





境界要素法（BEM）

- 境界要素法は，Kirchhoff–Helmholtz 積分方程式の離散化に基づく数値解析法である。
- 長所として，
  - 境界の要素分解によって，複雑な形状の領域の音場も解析できる。
  - 領域全体を離散化するのではなく，領域の境界のみを離散化すればよいので，要素分割が容易かつ未知数の数が少ない。
  - 境界を無限遠に設定することで，開空間が容易かつ低コストで解析できる。
- 短所として，
  - 連立方程式の係数行列が密な非対称行列になってしまい，演算量が大きくなりがち。
  - 特定の条件で連立方程式が解けない，あるいは解の精度が著しく低下する。（禁止周波数 or 解の非一意性問題）

境界要素法（BEM）

- 音源分布 $Q(\boldsymbol{r})$ の項を含んだ内部問題に関する Kirchhoff–Helmholtz 積分方程式を思い出すと，

$$\epsilon p(\boldsymbol{r}) = \int_\Omega Q(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' + \int_{\partial\Omega} \left(G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}')\frac{\partial p(\boldsymbol{r}')}{\partial \boldsymbol{n}'} - p(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}')}{\partial \boldsymbol{n}'} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

  ただし，$\boldsymbol{r} \in \Omega\backslash\partial\Omega$ のとき $\epsilon = 1$，$\boldsymbol{r} \in \partial\Omega$ のとき $\epsilon = 1/2$，$\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3\backslash\Omega$ のとき $\epsilon = 0$ である。

- ここでは簡単のため，音源を点音源とし，$Q(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\mathrm{s})$ とする。

$$\epsilon p(\boldsymbol{r}) = G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\mathrm{s}) + \int_{\partial\Omega} \left(G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}')\frac{\partial p(\boldsymbol{r}')}{\partial \boldsymbol{n}'} - p(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}')}{\partial \boldsymbol{n}'} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

境界要素法（BEM）

- 境界を要素に分割し，m 番目の境界要素 $\partial\Omega_m$ における音圧と音圧勾配が一定とみなす。

$$p(\boldsymbol{r}) \approx p_m, \qquad \frac{\partial p(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{n}} \approx \frac{\partial p_m}{\partial \boldsymbol{n}} \qquad (\boldsymbol{r} \in \partial\Omega_m)$$

- よって，境界の要素数を N とすれば，

$$\begin{aligned}
\epsilon p(\boldsymbol{r}) &= G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\mathrm{s}) + \sum_{m=1}^{N} \int_{\partial\Omega_m} \left(G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}') \frac{\partial p_m}{\partial \boldsymbol{n}'} - p_m \frac{\partial G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}')}{\partial \boldsymbol{n}'} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \\
&= G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_\mathrm{s}) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{N} p_m \left\{ \frac{\mathrm{j}k}{Z} \int_{\partial\Omega_m} G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}') \mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \int_{\partial\Omega_m} \frac{\partial G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}')}{\partial \boldsymbol{n}'} \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \right\}
\end{aligned}$$

ここで音圧と比音響インピーダンス比との関係 $p = \frac{Z}{\mathrm{j}k} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}$ を用いた。

境界要素法（BEM）

- $\boldsymbol{r}$ が N 個の境界要素の場合について考えれば，以下のような連立方程式が得られる。

$$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G} + \boldsymbol{H}\right)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$$

ここで，$\boldsymbol{I}$ は単位行列，

$$\boldsymbol{G} = \frac{\mathrm{j}k}{Z}\begin{bmatrix} \int_{\partial\Omega_1} G(\boldsymbol{r}_1|\boldsymbol{r}'_1)\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_1 & \cdots & \int_{\partial\Omega_N} G(\boldsymbol{r}_1|\boldsymbol{r}'_N)\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\partial\Omega_1} G(\boldsymbol{r}_N|\boldsymbol{r}'_1)\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_1 & \cdots & \int_{\partial\Omega_N} G(\boldsymbol{r}_N|\boldsymbol{r}'_N)\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_N \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial G(\boldsymbol{r}_1|\boldsymbol{r}'_1)}{\partial \boldsymbol{n}'}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_1 & \cdots & \int_{\partial\Omega_N} \frac{\partial G(\boldsymbol{r}_1|\boldsymbol{r}'_N)}{\partial \boldsymbol{n}'}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial G(\boldsymbol{r}_N|\boldsymbol{r}'_1)}{\partial \boldsymbol{n}'}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_1 & \cdots & \int_{\partial\Omega_N} \frac{\partial G(\boldsymbol{r}_N|\boldsymbol{r}'_N)}{\partial \boldsymbol{n}'}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_N \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_N \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} G(\boldsymbol{r}_1|\boldsymbol{r}_\mathrm{s}) & \cdots & G(\boldsymbol{r}_N|\boldsymbol{r}_\mathrm{s}) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

境界要素法（BEM）

- この連立方程式を解くことで，境界要素上の音圧 $p_1, \ldots, p_N$ が得られる。

$$\boldsymbol{p} = \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G} + \boldsymbol{H} \right)^{-1} \boldsymbol{q}$$

- $p_1, \ldots, p_N$ を離散化された Kirchhoff–Helmholtz 積分方程式に代入すれば，任意位置 $\boldsymbol{r}$ での音圧が得られる。

BEM による頭部伝達関数の数値計算 🤔

- 音像定位において，音源から外耳道入り口/鼓膜までの伝達関数である頭部伝達関数（Head-related transfer function: HRTF）が重要な役割を持つ。
- MRI などで測定した頭部形状データから HRTF を BEM によって数値計算した例。

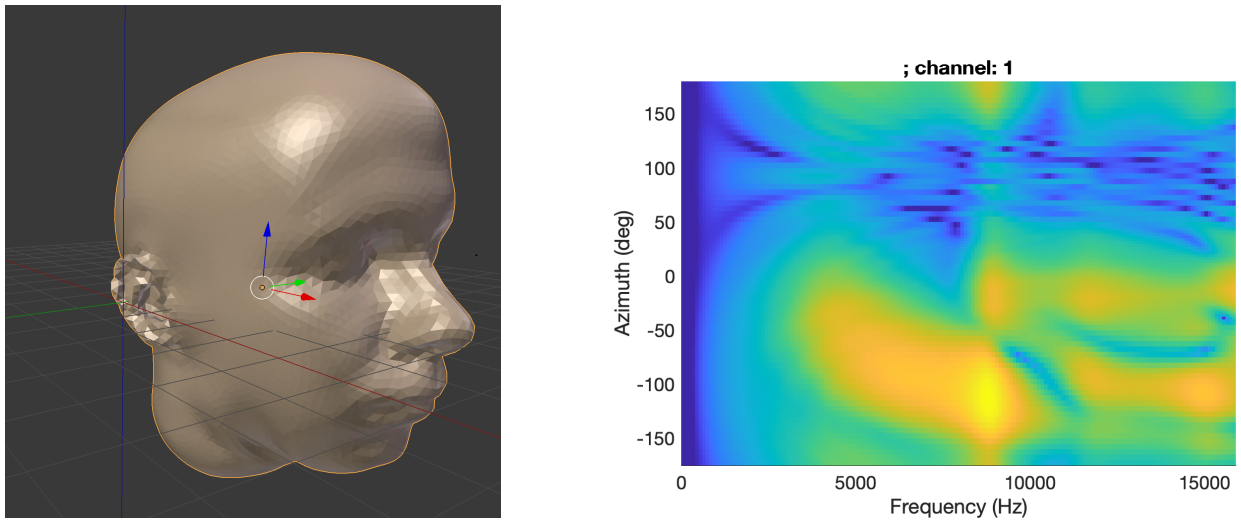


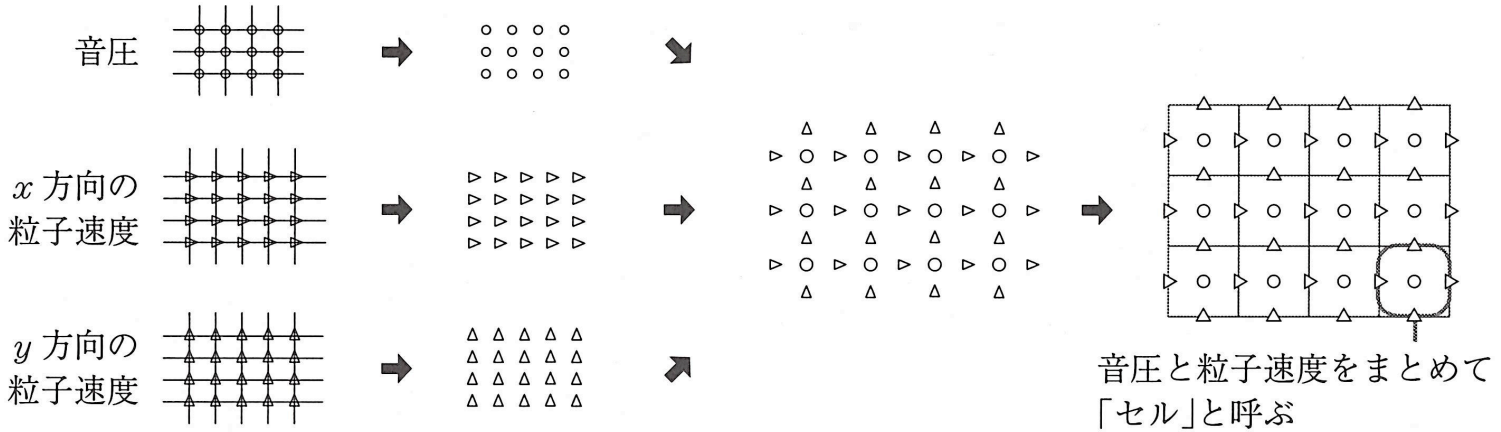
Figure: Mesh2HRTF (https://mesh2hrtf.sourceforge.io/) を用いた BEM による HRTF の数値計算例

時間領域有限差分法（FDTD 法）

- 時間領域有限差分法は，偏微分方程式を直接差分方程式として近似して解く方法である。
- 長所として，
  - 支配方程式をそのまま差分化するため，直感的に理解しやすい。
  - 時間信号として解を求めることができる。
  - 必要とする計算資源が比較的少ない。
- 短所として，
  - 境界のモデリング誤差が生じる場合がある。
  - 波長に対して十分に小さい空間の離散化が必要。

時間領域有限差分法（FDTD 法）

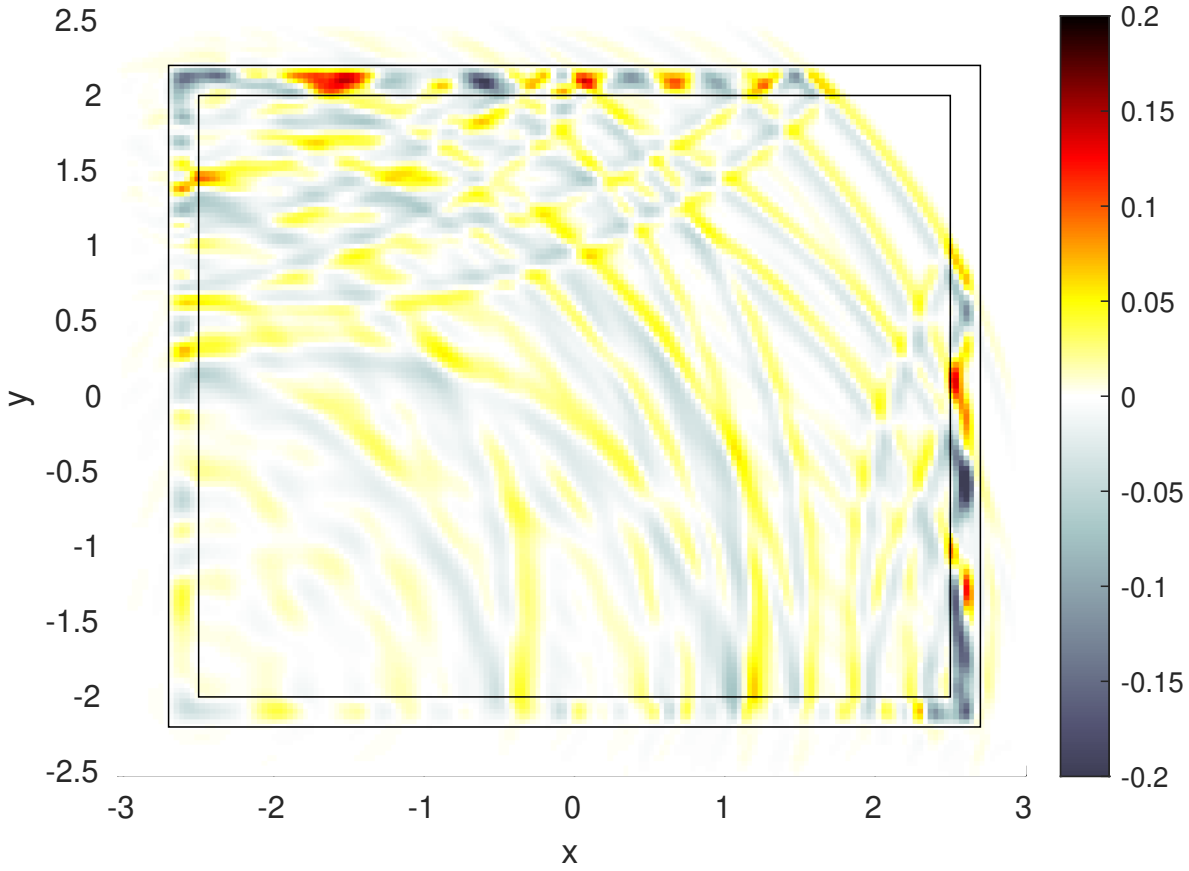
- FDTD 法では，まず領域を離散化し，初期条件を設定した後，時間間隔 Δt ごとに波動方程式の解を更新していく。
- 離散化の方法でよく用いられるスタガード格子では，粒子速度と音圧を互い違いの直交格子で保持する。図は [日本建築学会編 2012] より。



(a)　通常の直交格子　(b)　格子点だけ抜き出す　(c)　互い違いに配置　(d)　セル単位にまとめる

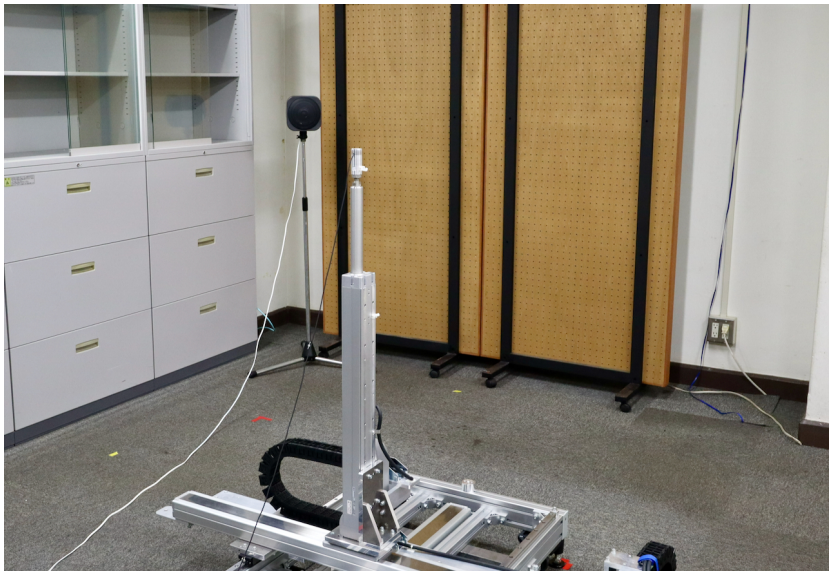
時間領域有限差分法（FDTD 法）

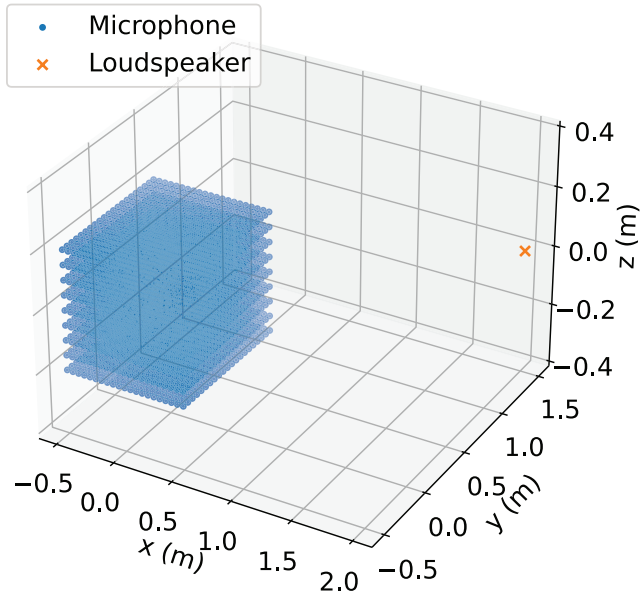
- k-wave (http://www.k-wave.org/) を用いた FDTD 法による音場の可視化の例。3 次元直方体形状（$5.0\ \mathrm{m} \times 4.0\ \mathrm{m} \times 3.0\ \mathrm{m}$）の室に点音源を配置。



実環境での測定音場の可視化 🤔

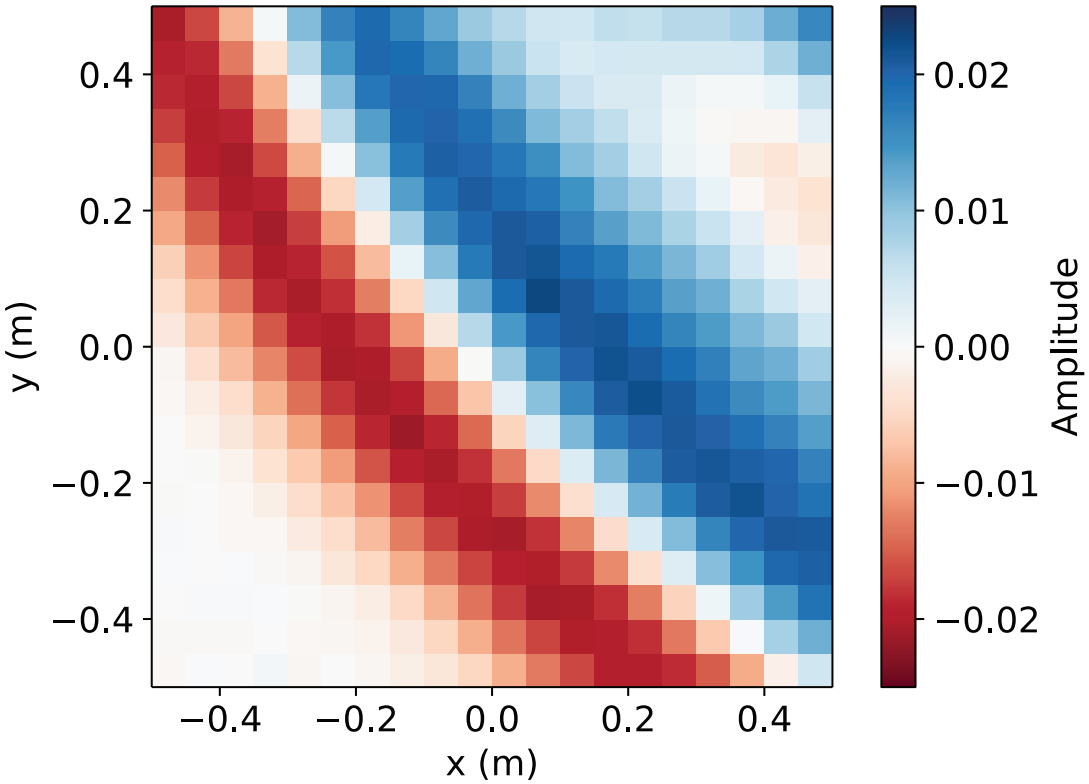
- 位置制御ロボットを用いた実環境音場の測定
- データセット：https://sh01k.github.io/MeshRIR/





実環境での測定音場の可視化 🤔

- パルス信号を出力した場合の音場の可視化



参考文献 I

E. G. Williams (1999)
Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography
Academic Presss, Cambridge.

H. Kuttruff (1991)
Room Acoustics
Spon Press, London.

M. Kac (1966)
Can one hear the shape of drum?
Amer. Math. Monthly, vol. 73, no. 4.

C. Gordon and D. Webb (1996)
You can't hear the shape of a drum
Am. Sci., vol. 84, no. 1.

参考文献 II

I. Dokmanić et al. (2013)
Acoustic echoes reveal room shape
PNAS, vol. 110, no. 30.

横山栄 (2012)
残響時間の測定における注意点
日本音響学会誌, 68 巻 8 号, pp. 403–408.

尾本章 (2006)
「簡単な」幾何音響理論
日本音響学会誌, 62 巻 10 号, pp. 738–743.

日本建築学会 編 (2012)
はじめての音響数値シミュレーションプログラミングガイド
コロナ社, Tokyo.

参考文献 III

大塚厚二 and 高石武史 (2014)

有限要素法で学ぶ現象と数理 – FreeFem++ 数理思考プログラミング –

共立出版, Tokyo.