

応用音響学 第7回

音波の伝播

小山 翔一

東京大学 大学院情報理工学系研究科 システム情報学専攻

2022/6/3

講義スケジュール

■ S セメスター 金曜 2 限 (10:25-12:10) @ 62 講義室

■ 日程

4/8	第 1 回	}	猿渡先生	6/3	第 7 回	}	小山
4/15	第 2 回		6/10	第 8 回			
4/22	第 3 回		6/17	第 9 回			
5/6	第 4 回		6/24	第 10 回			
5/13	第 5 回		7/1	第 11 回			
5/20	第 6 回		7/8	第 12 回			
5/27	休講			7/22	学期末試験		

講義目的

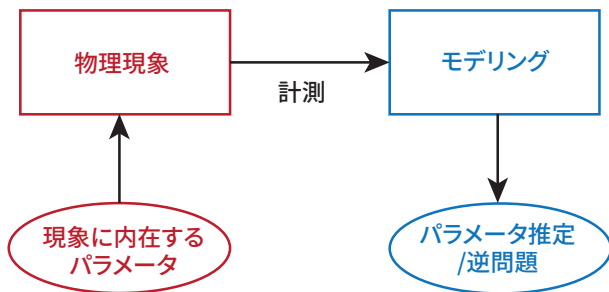
■ 講義前半（猿渡先生担当）

- 音声分析，音声符号化，音声認識，音声合成，音響信号処理などに関連する基礎知識について講義する。応用として，携帯電話やMP3などの音声音楽情報圧縮技術や音声認識技術・音声合成システムなどがある。統計的信号処理の基礎，スペクトル解析，パターン認識，確率モデル，統計学習，最適解探索などの基本概念とアルゴリズムを理解し，これらの技術の基礎になる知識と概念の習得を目指す。

■ 講義後半（小山担当）

- 音響現象の数理的なモデリング方法を理解することを目的とし，音波の伝播，反射，回折，散乱などの現象を数学的に記述するための基礎事項について講義する。応用として，音源位置の推定や音場の可視化，音のVR/ARや騒音・振動制御，音響数値シミュレーションなどがある。これらの基本概念を理解することで，様々な波動場の計測・制御技術の基礎となる知識の習得を目指す。

講義目的



- 様々な工学上の技術が、現象のモデリングと内在するパラメータの推定の2つで構成されている。
- 本講義では、音を題材に波動現象のモデリング方法を習得する。

講義後半の概要

■ 講義内容（予定）

- 6/3: 音波の伝播
- 6/10: 音響管・自由空間中の音波
- 6/17: 音場の境界値積分表現
- 6/24: フーリエ音響学 (1)
- 7/1: フーリエ音響学 (2)
- 7/8: 室内音響学と音響数値シミュレーション

■ 参考文献

- 安田仁彦, "機械音響学," コロナ社, 2004.
- E. G. Williams, "*Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*," Academic Press, 1999.

講義資料と成績評価

■ 講義資料

- ITC-LMS に前日までにアップロード予定
- <https://www.sh01.org/ja/teaching/>
あるいはシステム1研のウェブサイトからもたどれます

■ 成績評価

- 7/22 学期末試験

本日の目次

① 音波の伝播

波動方程式・Helmholtz 方程式

波動方程式の性質

平面波の伝播（1次元）

音響インピーダンス，音響インテンシティ，音圧レベル

平面波の伝播（3次元）

音波の反射，透過，屈折

本日の目次

① 音波の伝播

波動方程式・Helmholtz 方程式

波動方程式の性質

平面波の伝播 (1次元)

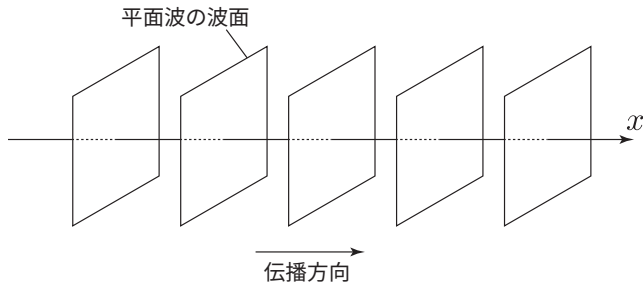
音響インピーダンス, 音響インテンシティ, 音圧レベル

平面波の伝播 (3次元)

音波の反射, 透過, 屈折

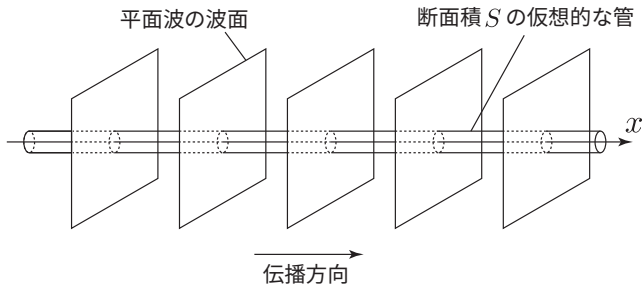
1次元の音波

- 媒質中を x 方向にのみ進行する音波を考える。(平面波)
- 断面積を S とする x 軸上の仮想的な管において、運動方程式と連続の式を考えることで、1次元の音波の支配方程式(波動方程式)を導く。

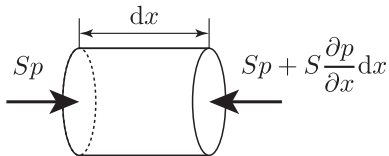


1次元の音波

- 媒質中を x 方向にのみ進行する音波を考える。(平面波)
- 断面積を S とする x 軸上の仮想的な管において、運動方程式と連続の式を考えることで、1次元の音波の支配方程式 (波動方程式) を導く。



1次元波動方程式



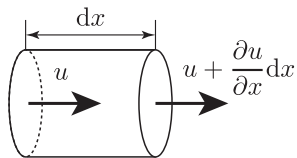
- 位置 x , 時刻 t における音圧を p , 粒子速度を v とする。
- dx の微小要素に加えられる力を考えると, 媒質の密度を ρ として以下が成り立つ。

$$\rho S dx \frac{\partial v}{\partial t} = Sp - \left(Sp + S \frac{\partial p}{\partial x} dx \right)$$

よって運動方程式は,

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

1次元波動方程式



- 粒子の変位を u とすれば, dx の微小要素に関する体積増加率 (もとの体積を基準とする増加量) が, 音圧 p と比例することから,

$$-p = K \frac{\partial u}{\partial x}$$

ここで, 比例定数 K を体積弾性率と呼ぶ。

- 粒子の変位 u を粒子速度 $v = \partial u / \partial t$ を用いて書き換えると, 以下の連続の式が得られる。

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t}$$

1次元波動方程式

- 運動方程式と連続の式から、1次元の波動方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad \left(\text{ただし, } c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \right)$$

ここで、 c は音速を表す。

1次元波動方程式

位置 x 、時刻 t における音圧 $p(x, t)$ と粒子速度 $v(x, t)$ は、 c を音速として以下の方程式に従う。

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}$$

- 音波以外にも様々な振動・波動現象を扱う上で重要な式。

速度ポテンシャル

- 音圧・粒子速度の代わりに、速度ポテンシャルを用いることもある。
- 速度ポテンシャル φ は、以下の関係式を満たす。

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

- これらが連続の式を満たすことから、速度ポテンシャル φ に関する波動方程式が得られる。

速度ポテンシャルに関する 1次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}$$

- 速度ポテンシャルが求まれば、音圧と粒子速度を関係づけて解析できるので便利。

周波数領域表現

- 音場が定常状態の場合、周波数領域で考えることができる。
- ω を角周波数とし、 $p(x, t)$ の t に関する Fourier 変換 $P(x, \omega)$ を次のように定義する。

$$P(x, \omega) = \mathcal{F}_t\{p(x, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t) e^{j\omega t} dt$$

ここで指数関数の肩が正であることに注意。(理由は後述)

- 波動方程式の両辺を t に関して Fourier 変換することで、Helmholtz 方程式が導かれる。

1次元 Helmholtz 方程式

$$\frac{\partial^2 P(x, \omega)}{\partial x^2} + k^2 P(x, \omega) = 0$$

ここで、 $k = \omega/c$ は波数。

周波数領域表現

- 一応簡単な導出を書くと、部分積分と $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} p = 0$ を用いれば、

$$\mathcal{F}_t \left\{ \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \right\} = -j\omega P(x, \omega)$$

となるので、

$$\mathcal{F}_t \left\{ \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} \right\} = \frac{\partial^2 P(x, \omega)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} P(x, \omega) = 0$$

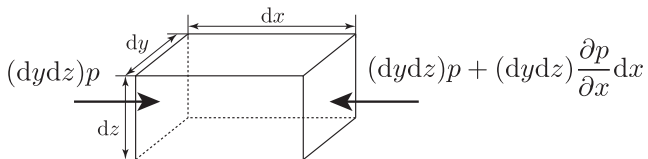
- 周波数領域の場合、音圧 $P(x, \omega)$ と粒子速度 $V(x, \omega)$ の関係は運動方程式から簡単な形で表すことができる。

周波数領域での音圧と粒子速度の関係

$$j\omega\rho V(x, \omega) = \frac{\partial P(x, \omega)}{\partial x}$$

3次元波動方程式

- 音波が2次元あるいは3次元的に伝播する場合も同じような形で波動方程式が導ける。
- 3次元の場合は, x, y, z 軸方向の長さが dx, dy, dz の微小直方体を考えて, 運動方程式と連続の式を立てる。



3次元波動方程式

- 結果だけ書くと、運動方程式，連続の式はそれぞれ，

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)^T$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t}$$

ここで、 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$ であり、 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ は粒子速度ベクトルである。

- 上式から、3次元の波動方程式は、

$$\nabla^2 p(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0$$

ただし、 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ であり、 $c = \sqrt{K/\rho}$ は音速を表す。

3次元波動方程式

3次元波動方程式

位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, 時刻 t における音圧 $p(\mathbf{r}, t)$ は以下の方程式に従う。

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

- 3次元の場合も速度ポテンシャル φ を導入することは多く,

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi, \quad p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

の関係を持つ。

- よって、速度ポテンシャルに関する3次元波動方程式も同様の形になる。(ちなみに粒子速度も)

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

3次元 Helmholtz 方程式

- 定常状態の場合、音場は3次元の Helmholtz 方程式で表せる。
- 3次元波動方程式の両辺を t に関して Fourier 変換すると、

$$\nabla^2 P(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} P(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

となる。ここで、 ω は角周波数である。

3次元 Helmholtz 方程式

位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 、角周波数 ω における音圧 $P(\mathbf{r}, \omega)$ は、以下の方程式に従う。

$$(\nabla^2 + k^2)P(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

ただし、 $k = \omega/c$ は波数。

本日の目次

① 音波の伝播

波動方程式・Helmholtz 方程式

波動方程式の性質

平面波の伝播 (1 次元)

音響インピーダンス, 音響インテンシティ, 音圧レベル

平面波の伝播 (3 次元)

音波の反射, 透過, 屈折

波動方程式の性質

- 波動方程式は2階の偏微分方程式のなかで**双曲型偏微分方程式**に分類される。(Helmholtz方程式は**楕円型偏微分方程式**)
- ここでは1次元波動方程式の一般解を求め、その性質を見してみる。
- $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ として変数変換すると、

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} \right)$$

となるので、音圧に関する1次元波動方程式は以下のように変形できる。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

波動方程式の性質

- よって一般解は、任意関数 F , G を用いて、

$$p(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

となる。 x , t を用いて書くと、

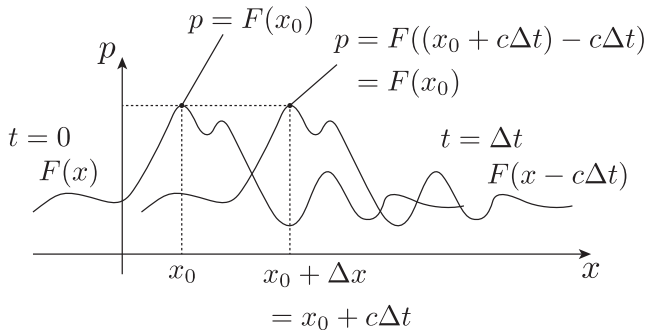
$$p(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

この一般解は **d'Alembert の解** と呼ばれている。

- 速度ポテンシャル, 粒子速度に関しても一般解は同様の形となる。

波動方程式の性質

- 第1項は波形を保ったまま x が正の方向に速度 c で伝わる波を表している。(第2項は x が負の方向に伝わる波)
- これは $x - ct$ が一定となる x と t において、 F が常に一定の値をとることからもわかる。(同様に、 $x + ct$ が一定となる x と t で G は一定)
- この $x - ct = C_1$, $x + ct = C_2$ (C_1, C_2 は定数) は**特性曲線**と呼ばれ、この直線に沿って波形が伝播することになる。



本日の目次

① 音波の伝播

波動方程式・Helmholtz 方程式

波動方程式の性質

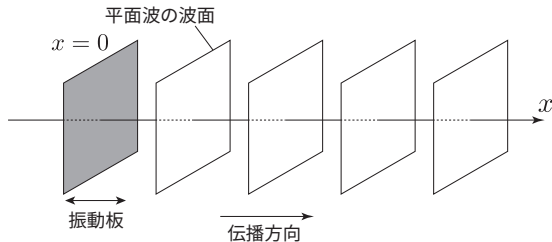
平面波の伝播 (1次元)

音響インピーダンス, 音響インテンシティ, 音圧レベル

平面波の伝播 (3次元)

音波の反射, 透過, 屈折

平面波の伝播 (1次元)



- $x = 0$ に無限大の振動板を設置し、この振動板から伝播する音波について考える。
- 振動板の速度を振幅 v_0 、角周波数 ω の正弦波として与えたとする、

$$v(0, t) = v_0 e^{-j\omega t}$$

正弦波を解析信号（この場合は複素正弦波）として表現していることに注意。

実信号と解析信号 🤔

- 自然界の信号は実信号だが、それに対応する複素信号である解析信号を考えると便利ことが多い。(多分、回路学などでは既に使っているはず。)
- 実信号を $s(t)$ とし、そのスペクトルを $S(\omega)$ とすると、解析信号 $z(t)$ は $S(\omega)$ の正の周波数成分だけを取り出した信号として表される。一般には、

$$z(t) = s(t) + \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t')}{t-t'} dt'$$

虚部は実信号 $s(t)$ の Hilbert 変換であり、 $z(t)$ の負の周波数成分が 0 になることは信号処理学第二でも出てきた。

- 特に複素正弦波 $e^{j\omega t}$ は頻りに用いられる。ただし、今回は後述する理由により、時間項を $e^{-j\omega t}$ で定義しているため、上記の複素共役になっていることに注意。

平面波の伝播 (1次元)

- このとき、速度ポテンシャルに関する1次元波動方程式の解を以下のように置く。

$$\varphi = \Phi e^{-j\omega t}$$

- これを波動方程式に代入すると、

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\Phi = 0$$

これは1次元 Helmholtz 方程式に一致。

- この式の一般解は、 A 、 B を未知定数として、

$$\Phi = Ae^{jkx} + Be^{-jkx}$$

ただし、 $k = \omega/c$ と置いた。

- したがって、

$$\varphi = Ae^{j(kx-\omega t)} + Be^{j(-kx-\omega t)}$$

平面波の伝播 (1 次元)

- この式の第 1 項, 第 2 項はそれぞれ x 軸の正の方向, 負の方向に進行する波を表す。ここでは, 正の方向に進行する波のみを考えればよいので $B = 0$ となる。

$$\varphi = Ae^{j(kx - \omega t)}$$

- $x = 0$ での粒子速度の条件から,

$$v(0, t) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = jkAe^{-j\omega t} = v_0e^{-j\omega t}$$

となるので,

$$\varphi = -j\frac{v_0}{k}e^{j(kx - \omega t)}, \quad p = \rho cv_0e^{j(kx - \omega t)}, \quad v = v_0e^{j(kx - \omega t)}$$

平面波の伝播 (1次元)

- ここまでの議論から、1次元平面波の複素正弦波は、

$$p = p_0 e^{j(kx - \omega t + \phi_0)}, \quad v = v_0 e^{j(kx - \omega t + \phi_0)}$$

のような形になる。

- ここでは複素正弦波を $e^{-j\omega t}$ として指数関数の肩を負としたが、 $e^{+j\omega t}$ とすることもできる。(むしろこれまではこちらが普通だったかもしれない。)
- この場合、正の方向に進行する平面波は、

$$p = p_0 e^{j(\omega t - kx + \phi_0)}, \quad v = v_0 e^{j(\omega t - kx + \phi_0)}$$

- 実際にどちらの定義もありえるが、1次元の時間信号のみを扱う場合は後者が多く、波動方程式を時空間で扱う場合は前者が多い。
- 本講義では $e^{-j\omega t}$ を複素正弦波として定義するため、時間領域の Fourier 変換も位相の正負が逆になる。

平面波の伝播 (1次元)

- 振動板の速度が正弦波ではなく、任意の関数 $f(t)$ で与えられる場合は、正弦波の結果の逆 Fourier 変換を考えればよい。
- $f(t)$ の Fourier 変換を $F(\omega)$ とすれば、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

として定義されるので、 $x = 0$ での粒子速度の条件は、

$$v(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

平面波の伝播 (1次元)

- 各周波数 ω の振幅が $F(\omega)$ で重み付けされていると考えればよいので、音圧と粒子速度はそれぞれ、

$$p = \frac{\rho c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j(kx - \omega t)} d\omega = \rho c f \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j(kx - \omega t)} d\omega = f \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

となる。

- 速度ポテンシャルに関する d'Alembert の解から出発し、 $x = 0$ での粒子速度の条件を与えても同じ式が得られる。

本日の目次

① 音波の伝播

波動方程式・Helmholtz 方程式

波動方程式の性質

平面波の伝播 (1次元)

音響インピーダンス, 音響インテンシティ, 音圧レベル

平面波の伝播 (3次元)

音波の反射, 透過, 屈折

音響インピーダンス

- ここでいくつか物理量を定義。
- **音響インピーダンス密度**：ある一点での音圧 p ($\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$) と粒子速度 v (m/s) との比。比音響インピーダンスとも呼ぶ。

$$z = \frac{p}{v} \quad (\text{N s}/\text{m}^3)$$

- 特に平面波の場合は、前スライドまでの結果から $z = \rho c$ であり、媒質に固有の値となる。これを特に**固有音響インピーダンス**あるいは**特性インピーダンス**と呼ぶ。
- 固有音響インピーダンス z が大きい媒質中では、そうでない媒質中に比べて、同じ粒子速度で大きな圧力変動が媒質内に生じる。
- z は、金属などの硬い媒質では大きく、気体のような媒質では小さい。

音響インピーダンス

- 下表に、いくつかの媒質の固有音響インピーダンスを密度、音速とともに示す。([安田 2004] p.30 より転載)

	密度 (kg/m^3)	音速 c (m/s)	固有音響インピーダンス (Ns/m^3)
空気 (20 °C)	1.18	343	405
水 (20 °C)	1000	1500	1.50×10^6
コンクリート	2600	3100	8.10×10^6
鋼	7700	5000	3.90×10^7

音響インテンシティ

- **瞬時音響インテンシティ**：単位時間あたりに単位面積を通過するエネルギー。

$$E = p(t)v(t) \quad (\text{J/s m}^2 = \text{W/m}^2)$$

- **時間平均音響インテンシティ**：時間平均したエネルギー E 。周期 T での平均として定義される。

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t)v(t)dt \\ &= p_e v_e \quad (\text{W/m}^2) \end{aligned}$$

ただし、 p_e 、 v_e は p と v の実効値であり、 $p_e = \sqrt{z}v_e$ が成り立つ。

$$p_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t)^2 dt}, \quad v_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t)^2 dt}$$

音響インテンシティ

- 解析信号あるいは周波数領域表現での時間平均音響インテンシティは,

$$I = \frac{1}{2} \Re \{ p v^* \} \quad (\text{W/m}^2)$$

となる。 p , v を

$$p = p_0 e^{-j(\omega t + \phi_p)}, \quad v = v_0 e^{-j(\omega t + \phi_v)}$$

とすると,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \Re \left\{ p_0 e^{-j(\omega t + \phi_p)} \cdot v_0 e^{j(\omega t + \phi_v)} \right\} \\ &= \frac{p_0 v_0}{2} \cos(\phi_p - \phi_v) \end{aligned}$$

となり, 時間領域で

$$p(t) = p_0 \cos(\omega t + \phi_p), \quad v(t) = v_0 \cos(\omega t + \phi_v)$$

とした場合に一致。

音圧レベル・音響インテンシティレベル

- 音圧レベル：音圧の実効値 p_e と基準音圧との比。

$$L_p = 10 \log_{10} \frac{p_e^2}{p_{e0}^2} \quad (\text{dB})$$

ここで, p_{e0} は聴覚で聞き取ることができる最小の音圧 (最小可聴値) $p_{e0} = 2.0 \times 10^{-5} \text{ Pa}$ を用いる。

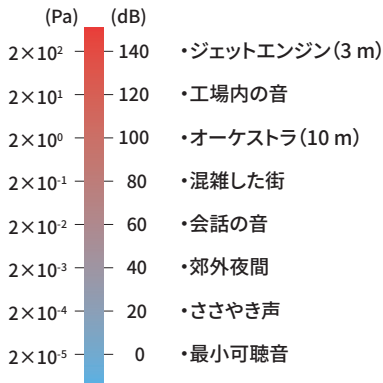
- 音響インテンシティレベル：時間平均音響インテンシティ I と基準値との比。

$$L_I = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad (\text{dB})$$

ここでの基準値は最小可聴値の音圧レベルを持つ平面波のインテンシティ $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ 。

- 空気中の平面波の場合, 音圧レベルと音響インテンシティレベルの数値はほぼ一致する。

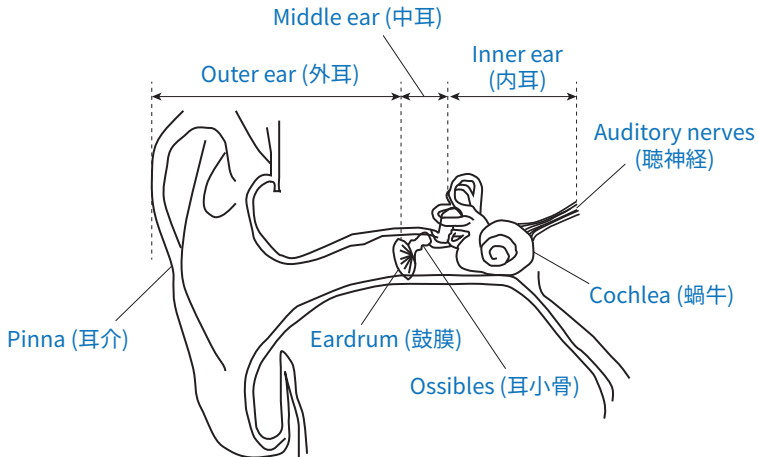
音圧レベル・音響インテンシティレベル



- 上図は音圧・音圧レベルとその身近な例 [安田 2004]。
- 人間の感覚量が物理量の対数にほぼ比例する例であり、これによって聴覚は極めて広いダイナミックレンジを持つ。

ヒトの聴覚系 🤔

■ ヒトの聴覚器官の構成



ヒトの聴覚系 🤔

- 感覚量としての音の大きさをラウドネスと呼び、正常な聴力をもつ人が、ある音と同じラウドネスに聞こえる 1000 Hz の正弦波の音圧レベルをラウドネスレベルと呼ぶ（単位はフォン/phon）。
- 1000 Hz の正弦波と同じラウドネスとなる他の周波数の正弦波の音圧レベルを求めたときの曲線を、等ラウドネス曲線と呼ぶ。

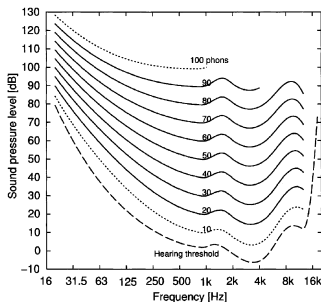


Figure: 等ラウドネス曲線 [Suzuki&Takeshima 2004]

本日の目次

① 音波の伝播

波動方程式・Helmholtz 方程式

波動方程式の性質

平面波の伝播 (1次元)

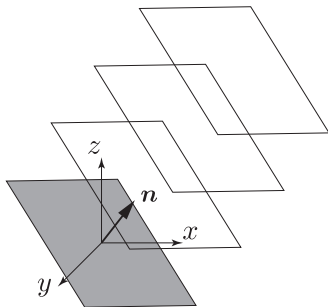
音響インピーダンス, 音響インテンシティ, 音圧レベル

平面波の伝播 (3次元)

音波の反射, 透過, 屈折

平面波の伝播 (3次元)

- 次に3次元の平面波伝播について考える。
- 原点を通る平面上に無限に大きい振動板が置かれ、この振動板が法線方向に振動することで発生する平面波を考える。
- 振動板の法線方向を $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$ とし、 \mathbf{n} 方向に速度 $v_n = v_0 e^{-j\omega t}$ で振動するものとする。



平面波の伝播 (3次元)

- 位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ での速度ポテンシャル φ は、3次元の波動方程式に従う。

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

- また、音圧 p , 粒子速度 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ との関係思い出すと、

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \mathbf{v} = \nabla \varphi$$

- 境界条件は $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$ の平面上の粒子速度 v_n として与えられていた。これを φ で表すと、

$$\begin{aligned} v_n &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \\ &= \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \end{aligned}$$

平面波の伝播 (3次元)

- 1次元のときと同じように、 $\varphi = \Phi e^{-j\omega t}$ と置くと、 Φ は3次元 Helmholtz 方程式に従う。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k^2 \Phi = 0$$

- この式の一般解は、 $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ を満たす変数 k_x, k_y, k_z を用いて、 $e^{j(\pm k_x x \pm k_y y \pm k_z z)}$ の重ね合わせとなる。
- Φ は平面 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$ 上で値が一定になるはずなので、 φ の一般解は、

$$\varphi = A e^{j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} + B e^{j(-k_x x - k_y y - k_z z - \omega t)}$$

- さらに、 $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)^\top$ とすると、 \mathbf{k} は \mathbf{n} のスカラー倍である必要があることと、 $\|\mathbf{k}\|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$ の条件より、

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)^\top = k(n_x, n_y, n_z)^\top = k\mathbf{n}$$

平面波の伝播 (3次元)

- 前スライドの一般解は、第一項が \mathbf{n} の方向に進行する波、第二項が $-\mathbf{n}$ の方向に進行する波を表しており、ここでは法線方向に進む波のみを考えるので $B = 0$ としてよい。よって、

$$\varphi = Ae^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = Ae^{j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

- $v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_0 e^{-j\omega t}$ の条件より、

$$A = -j \frac{v_0}{k}$$

となるので、

$$\varphi = -j \frac{v_0}{k} e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad p = \rho c v_0 e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad \mathbf{v} = v_0 \frac{\mathbf{k}}{k} e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

平面波の伝播 (3次元)

- 以上の議論から、3次元の平面波は一般に以下のような形になる。

$$p = p_0 e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_0)}, \quad \mathbf{v} = v_0 \frac{\mathbf{k}}{k} e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_0)}$$

ここで、 $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)^T$ は**波数ベクトル**と呼ばれる。

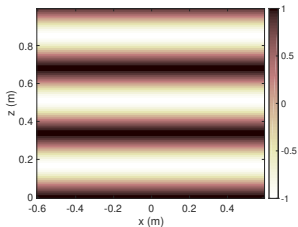
- $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$ (C は定数) の平面、つまり \mathbf{n} に垂直な平面上で同じ値となり、これが波面を表わす。
- 3次元の場合、音響インテンシティは、粒子速度と同じくベクトル値となり、インテンシティの方向を表わす。たとえば前スライドの平面波における時間平均音響インテンシティは、

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \frac{1}{2} \Re\{p\mathbf{v}^*\} \\ &= \frac{\rho c |v_0|^2}{2k} \mathbf{k} \end{aligned}$$

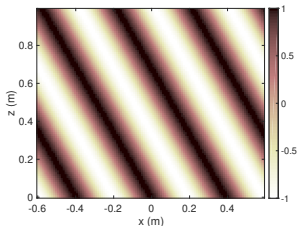
平面波の伝播 (3次元)

$k = 18.48\text{m}^{-1}$ の平面波による x - z 平面上の音圧分布 ($t = 0$)

■ $(k_x, k_y) = (0.0, 0.0)$



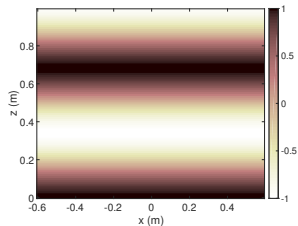
■ $(k_x, k_y) = (16.0, 0.0)$



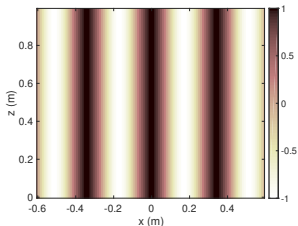
平面波の伝播 (3 次元)

$k = 18.48\text{m}^{-1}$ の平面波による x - z 平面上の音圧分布 ($t = 0$)

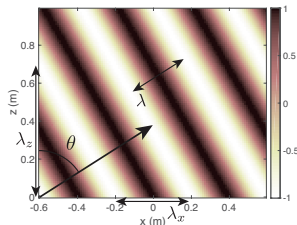
■ $(k_x, k_y) = (0.0, 16.0)$



■ $(k_x, k_y) = (18.48, 0.0)$



平面波の伝播 (3次元)



- 平面波の進行方向によって、 x - z 平面上の波長や音速が変化する。
- $k_y = 0$ として、 x - z 平面における進行方向を θ とすると、 x , z 方向の波長および波数が定義できる。

$$\lambda_x \sin \theta = \lambda, \quad \lambda_z \cos \theta = \lambda$$

$$k_x = k \sin \theta, \quad k_z = k \cos \theta$$

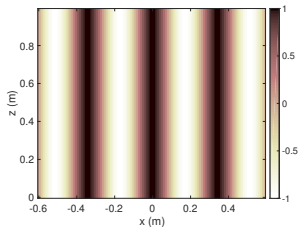
- さらに、このときの x , z 方向の音速は、

$$c_x = c / \sin \theta, \quad c_z = c / \cos \theta$$

平面波の伝播 (3次元)

$k = 18.48\text{m}^{-1}$ の平面波による x - z 平面上の音圧分布 ($t = 0$)

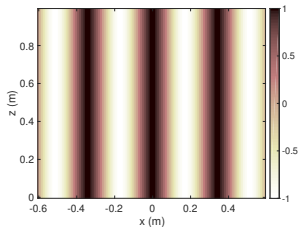
■ $(k_x, k_y) = (18.48, 0.0)$



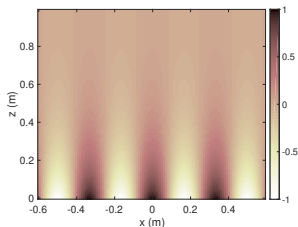
平面波の伝播 (3次元)

$k = 18.48\text{m}^{-1}$ の平面波による x - z 平面上の音圧分布 ($t = 0$)

■ $(k_x, k_y) = (18.48, 0.0)$



■ $(k_x, k_y) = (19.0, 0.0)$
⇒ z 方向に急激に減衰する



平面波の伝播 (3次元)

- 波数ベクトルの関係式から,

$$k_z = \pm \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$$

- $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ の場合, k_z は虚数となる。

$$k_z = \pm j \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2} = \pm j k'_z$$

- ここで, k'_z は実数であり, 平面波は以下のような形で書ける。

$$p = A e^{\mp k'_z z} e^{j(k_x x + k_y y)}$$

- 波源が $z < 0$ の半空間に存在するとすれば, $e^{+k'_z z}$ の解は物理的な意味を持たないので,

$$p = A e^{-k'_z z} e^{j(k_x x + k_y y)}$$

- これは z 方向に指数的に減衰する波を表しており, **エバネッセント波**と呼ばれる。

本日の目次

① 音波の伝播

波動方程式・Helmholtz 方程式

波動方程式の性質

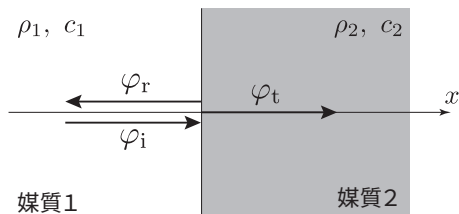
平面波の伝播（1次元）

音響インピーダンス，音響インテンシティ，音圧レベル

平面波の伝播（3次元）

音波の反射，透過，屈折

反射と透過



- 振幅 p_0 , 周波数 ω の平面波が境界面に垂直に入射する場合を考える。

$$p = p_0 e^{-j\omega t}$$

- 媒質 1, 媒質 2 での速度ポテンシャルを φ_1, φ_2 , 媒質の密度を ρ_1, ρ_2 , 音速を c_1, c_2 とする。

反射と透過

- 媒質 1 の速度ポテンシャルは, 入射波と反射波の速度ポテンシャル φ_i , φ_r の和として書ける。

$$\varphi_1 = A_i e^{j(k_1 x - \omega t)} + B_r e^{j(-k_1 x - \omega t)}$$

ここで, $k_1 = \omega/c_1$ は媒質 1 の波数であり, A_i , B_r はそれぞれ入射波, 反射波の振幅。

- 媒質 2 では透過波のみが存在するので,

$$\varphi_2 = A_t e^{j(k_2 x - \omega t)}$$

A_t は透過波の振幅。

反射と透過

- 入射波の音圧は p_0 に等しいことから,

$$A_i = \frac{p_0}{j\rho_1\omega}$$

- 境界面において媒質 1, 2 の音圧と粒子速度が等しいこと (連続の条件) より,

$$p_i + p_r = p_t, \quad v_i + v_r = v_t \quad (x = 0)$$

となるので,

$$\rho_1 A_i + \rho_1 B_r = \rho_2 A_t, \quad k_1 A_i - k_1 B_r = k_2 A_t$$

反射と透過

- 媒質 1, 2 の固有音響インピーダンス $z_1 = \rho_1 c_1$, $z_2 = \rho_2 c_2$ を用いて,

$$B_r = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} A_i, \quad A_t = \frac{2z_2}{z_1 + z_2} \frac{\rho_1}{\rho_2} A_i$$

- したがって, 反射波の音圧 p_r と粒子速度 v_r および透過波の音圧 p_t と粒子速度 v_t は,

$$p_r = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} p_0 e^{j(-k_1 x - \omega t)}, \quad v_r = -\frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} \frac{p_0}{z_1} e^{j(-k_1 x - \omega t)}$$

$$p_t = \frac{2z_2}{z_1 + z_2} p_0 e^{j(k_1 x - \omega t)}, \quad v_t = \frac{2z_2}{z_1 + z_2} \frac{p_0}{z_2} e^{j(k_1 x - \omega t)}$$

- $z_1 = z_2$ の場合は, 異なった媒質の境界面であっても反射波が生じず, 入射波はそのまま透過波となる。

反射と透過

- **反射率, 透過率**は, 入射波の振幅に対する反射波と透過波の振幅の比として定義される。音圧に対しては,

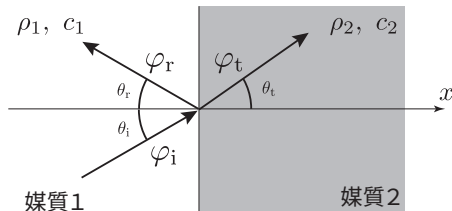
$$R_p = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2}, \quad T_p = \frac{2z_2}{z_1 + z_2}$$

粒子速度に対しても同様に反射率・透過率が定義される。

- **音響インテンシティ**についても同様に入射波に対する反射波, 透過波の比として, 反射率・透過率が定義される。

$$R_I = \frac{I_r}{I_i} = \frac{(z_2 - z_1)^2}{(z_1 + z_2)^2}, \quad T_I = \frac{I_t}{I_i} = \frac{4z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}$$

反射と屈折



- 入射波が境界面に斜めに入射する場合，透過波は**屈折**する。これを**屈折波**と呼ぶ。
- 入射角 θ_i と反射角 θ_r は等しい。 ($\theta_i = \theta_r$)
- 入射角 θ_i と屈折角 θ_t は，スネルの法則によって以下の関係を満たす。

$$\frac{\sin \theta_i}{c_1} = \frac{\sin \theta_t}{c_2}$$

反射と屈折

- 境界面に対して θ_i の入射角で伝播する入射波の音圧を以下のように置く。

$$p_i = p_0 e^{j[k_1(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i) - \omega t]}$$

この速度ポテンシャルは,

$$\varphi_i = A_i e^{j[k_1(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i) - \omega t]}$$

ただし,

$$A_i = \frac{p_0}{j\omega\rho_1}$$

- 反射波と屈折波の速度ポテンシャルも同様に定義すると,

$$\varphi_r = B_r e^{j[k_1(-x \cos \theta_i + y \sin \theta_i) - \omega t]}, \quad \varphi_t = A_t e^{j[k_2(x \cos \theta_t + y \sin \theta_t) - \omega t]}$$

反射と屈折

- 境界における連続の条件は,

$$p_i + p_r = p_t, \quad v_{ix} + v_{rx} = v_{tx} \quad (x = y = 0)$$

- よって, 音圧と粒子速度を速度ポテンシャルから求めることで, 以下の関係式が導ける。

$$\rho_1 A_i + \rho_1 B_r = \rho_2 A_t, \quad k_1 A_i \cos \theta_i - k_1 B_r \cos \theta_i = k_2 A_t \cos \theta_t$$

- これらの式から, B_r , A_t を求めると,

$$B_r = \frac{z_2 \cos \theta_i - z_1 \cos \theta_t}{z_2 \cos \theta_i + z_1 \cos \theta_t} A_i, \quad A_t = \frac{2z_2 \cos \theta_i}{z_2 \cos \theta_i + z_1 \cos \theta_t} \frac{\rho_1}{\rho_2} A_i$$

ただし, $z_1 = \rho_1 c_1$, $z_2 = \rho_2 c_2$ の関係を用いた。

参考文献



安田仁彦 (2004)

機械音響学

コロナ社, Tokyo.



三井田惇郎 (1987)

音響工学

昭晃堂, Tokyo.



E. G. Williams (1999)

Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography

Academic Presss, Cambridge.



Y. Suzuki and H. Takeshima (2004)

Equal-loudness-level contours for pure tones

J. Acoust. Soc. Am., vol. 116, no. 2.