

# 応用音響学 第11回

## フーリエ音響学 (2)

小山 翔一

東京大学 大学院情報理工学系研究科 システム情報学専攻

2021/7/2

# 講義スケジュール

■ S セメスター 金曜 2 限 (10:25-12:10) @オンライン

■ 日程

4/9	第 1 回	} 猿渡先生	5/21	第 7 回	} 小山
4/16	第 2 回		5/28	休講	
4/23	第 3 回		6/4	第 8 回	
4/30	第 4 回		6/11	第 9 回	
5/7	第 5 回		6/18	第 10 回	
5/14	第 6 回		6/25	休講	
			7/2	第 11 回	
			7/9	第 12 回	

# 講義目的

## ■ 講義前半（猿渡先生担当）

- 音声分析，音声符号化，音声認識，音声合成，音響信号処理などに関連する基礎知識について講義する。応用として，携帯電話やMP3などの音声音楽情報圧縮技術や音声認識技術・音声合成システムなどがある。統計的信号処理の基礎，スペクトル解析，パターン認識，確率モデル，統計学習，最適解探策などの基本概念とアルゴリズムを理解し，これらの技術の基礎になる知識と概念の習得を目指す。

## ■ 講義後半（小山担当）

- 音響現象の数理的なモデリング方法を理解することを目的とし，音波の伝播，反射，回折，散乱などの現象を数学的に記述するための基礎事項について講義する。応用として，音源位置の推定や音場の可視化，音のVR/ARや騒音・振動制御，音響数値シミュレーションなどがある。これらの基本概念を理解することで，様々な波動場の計測・制御技術の基礎となる知識の習得を目指す。

# 講義後半の概要

## ■ 講義内容（予定）

- 5/21: 音波の伝播
- 6/4: 音響管・自由空間中の音波
- 6/11: 音場の境界値積分表現
- 6/18: フーリエ音響学 (1)
- 7/2: フーリエ音響学 (2)
- 7/9: 室内音響学と音響数値シミュレーション

## ■ 参考文献

- 安田仁彦, "機械音響学," コロナ社, 2004.
- E. G. Williams, "*Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*," Academic Press, 1999.

# 講義資料と成績評価

## ■ 講義資料

- ITC-LMS に前日までにアップロード予定
- <http://www.sh01.org/ja/teaching/>  
あるいはシステム1研のウェブサイトからもたどれます

## ■ 成績評価

- レポート or オンライン試験 (7/30)

# 本日の目次

## ① フーリエ音響学 (2)

音場の球波動関数展開

音場の境界値積分表現の具体例

# 本日の目次

## ① フーリエ音響学 (2)

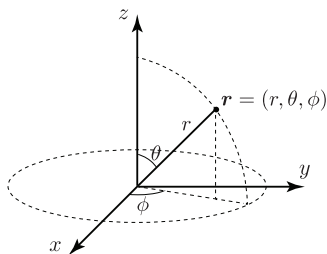
音場の球波動関数展開

音場の境界値積分表現の具体例

## 球座標系での波動方程式

- 球座標系  $(r, \theta, \phi)$  での波動方程式を考える。(cf. 第 8 回の資料)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$





## 球座標系での波動方程式

- 変数分離法を用いれば,

$$p(r, \theta, \phi, t) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)T(t)$$

と書けることから, 以下が導かれる。

$$\frac{d\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0$$
$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] \Theta = 0$$
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R - \frac{n(n+1)}{r^2} R = 0$$
$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 T}{dt^2} + k^2 T = 0$$

## 球座標系での波動方程式

- 一般解は、任意定数  $T_1, T_2, \Phi_1, \Phi_2, \Theta_1, \Theta_2, R_1, R_2$  を用いて、

$$T(t) = T_1 e^{-j\omega t} + T_2 e^{j\omega t}$$

$$\Phi(\phi) = \Phi_1 e^{jm\phi} + \Phi_2 e^{-jm\phi}$$

$$\Theta(\theta) = \Theta_1 P_n^m(\cos\theta) + \Theta_2 Q_n^m(\cos\theta)$$

$$R(r) = R_1 j_n(kr) + R_2 n_n(kr)$$

- 時間依存項の定義から、 $T_2 = 0$ 。
- $\Phi$  に関する一般解は、以下のように書くこともできる。

$$\Phi(\phi) = \Phi_3 \cos(m\phi) + \Phi_4 \sin(m\phi)$$

## 球座標系での波動方程式

- $\Theta$  に関する一般解は、 $\eta = \cos \theta$  ( $-1 \leq \eta \leq 1$ ) なる変数変換によって得られる微分方程式

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{d\Theta}{d\eta} \right] + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] \Theta = 0$$

の解である、第1種および第2種 Legendre 陪関数  $P_n^m(\cdot)$ ,  $Q_n^m(\cdot)$  による。ただし、 $Q_n^m(\cdot)$  は  $\eta = \pm 1$  において発散するため、 $\Theta_2 = 0$  とする。

- 動径方向関数  $R(r)$  は、第1種および第2種球 Bessel 関数（あるいは球 Bessel, Neumann 関数）による。これは第1種、第2種球 Hankel 関数  $h_n^{(1)}(\cdot)$ ,  $h_n^{(2)}(\cdot)$  を用いて以下のようにも書ける。

$$R(r) = R_3 h_n^{(1)}(kr) + R_4 h_n^{(2)}(kr)$$

## 球座標系での波動方程式

- 角度関数はまとめて球面調和関数として定義する。

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{jm\phi}$$

- 球面調和関数は完全直交系となる。

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi Y_n^m(\theta, \phi) Y_{n'}^{m'}(\theta, \phi)^* \sin\theta d\theta = \delta_{nn'} \delta_{mm'}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \phi) Y_n^m(\theta', \phi')^* = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos\theta - \cos\theta')$$

ここで2番目の式の右辺は、球面上での2次元デルタ関数である。

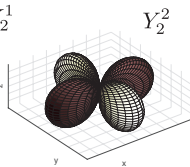
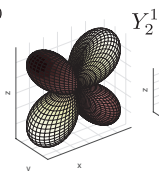
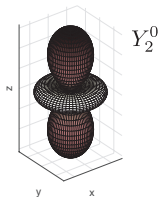
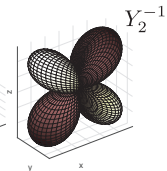
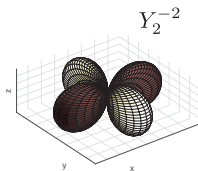
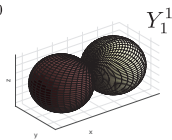
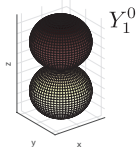
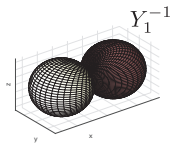
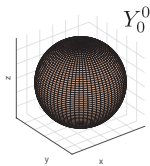
# 球座標系での波動方程式

- 球面調和関数を使って、球面上の任意の関数  $f(\theta, \phi)$  を展開できる。

$$f(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm} Y_n^m(\theta, \phi),$$

$$A_{nm} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta Y_n^m(\theta, \phi)^* f(\theta, \phi)$$

## 球面調和関数



# 球 Bessel 関数

## ■ 球 Bessel 関数:

$$j_n(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} J_{n+1/2}(x)$$

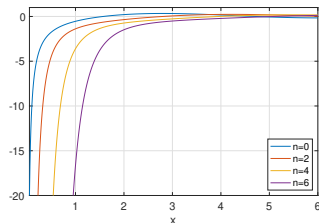
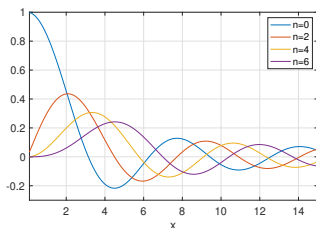
## ■ 球 Neumann 関数:

$$n_n(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} N_{n+1/2}(x)$$

## ■ 第 1 種, 第 2 種球 Hankel 関数:

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + jn_n(x)$$

$$h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - jn_n(x)$$



# 球 Bessel 関数

## ■ 球 Bessel 関数に関する Wronskian

$$j_n(x)n'_n(x) - j'_n(x)n_n(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$j_n(x)h_n^{(1)'}(x) - j'_n(x)h_n^{(1)}(x) = \frac{j}{x^2}$$



## 球座標系での波動方程式

- 以上をまとめると、球座標系での周波数領域における一般解は、定在波の場合、任意定数  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  を用いて、

$$p(r, \theta, \phi, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_{mn} j_n(kr) + B_{mn} n_n(kr)) Y_n^m(\theta, \phi)$$

- 進行波の場合は、任意定数  $C_{mn}$ ,  $D_{mn}$  を用いて、

$$p(r, \theta, \phi, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left( C_{mn} h_n^{(1)}(kr) + D_{mn} h_n^{(2)}(kr) \right) Y_n^m(\theta, \phi)$$

## 音場の球波動関数展開

- 内部問題の一般解は、球面の内側に伝播し、原点で有限の値となる必要があるため、

$$p(r, \theta, \phi, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{mn}(\omega) j_n(kr) Y_n^m(\theta, \phi)$$

となる。 $j_n(kr) Y_n^m(\theta, \phi)$  は内部問題における**球波動関数**である。

- 外部問題では、一般解は原点で有限の値をとる必要はないが、球面の外側に伝播する波を表す必要があるため、

$$p(r, \theta, \phi, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{mn}(\omega) h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\theta, \phi)$$

となる。 $h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\theta, \phi)$  は外部問題における**球波動関数**である。

## 球面調和関数展開による音場の外挿

- 球座標系の場合も，空間 Fourier 変換（この場合は球面調和関数展開）による音場の外挿を考えることができる。
- 球面上の音圧分布からの放射音場を求める，外部問題について考える。 $r = a$ における**球面波スペクトル**  $P_{mn}(r)$  は，以下の関係を持つ。

$$P_{mn}(a) = \int p(a, \theta, \phi) Y_n^m(\theta, \phi)^* \sin \theta d\theta d\phi$$

$$p(a, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n P_{mn}(a) Y_n^m(\theta, \phi)$$

- $r = a$ としたときの外部問題の一般解は，

$$p(a, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{mn}(\omega) h_n^{(1)}(ka) Y_n^m(\theta, \phi)$$

## 球面調和関数展開による音場の外挿

- 球面波スペクトルの式と一般解とを比較すると、  
 $P_{mn}(a) = C_{mn} h_n^{(1)}(ka)$  となるので、

$$p(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{h_n^{(1)}(kr)}{h_n^{(1)}(ka)} P_{mn}(a) Y_n^m(\theta, \phi)$$

球面境界の場合は、球面波スペクトル  $P_{mn}(r)$  が平面境界の場合の角度スペクトルに対応する。

- よって、球面波スペクトルにおける外部問題の場合の音場外挿は、以下ようになる。

$$P_{mn}(r) = \frac{h_n^{(1)}(kr)}{h_n^{(1)}(ka)} P_{mn}(a)$$

これにより異なる半径の異なる球面の間で波数領域での関係が与えられる。

## 球面調和関数展開による音場の外挿

- 粒子速度分布の関係を考えるため、動径方向の粒子速度  $v_r$  と、その球面波スペクトル  $V_{r,mn}$  を導入する。

$$V_{r,mn}(r) = \iint v_r(r, \theta, \phi) Y_n^m(\theta, \phi)^* \sin \theta d\theta d\phi$$

$$v_r(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n V_{r,mn}(r) Y_n^m(\theta, \phi)$$

- $j\rho c k V_{r,mn} = dP_{mn}(r)/dr$  より、音圧に関する球面波スペクトルの外挿の式を用いれば、

$$v_r(r, \theta, \phi) = \frac{1}{j\rho c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{h_n^{(1)\prime}(kr)}{h_n^{(1)}(ka)} P_{mn}(a) Y_n^m(\theta, \phi)$$

## 球面調和関数展開による音場の外挿

- 以上により，速度スペクトルと音圧スペクトルとの関係が得られる。

$$V_{r,mn}(r) = \frac{1}{j\rho c} \frac{h_n^{(1)'}(kr)}{h_n^{(1)}(ka)} P_{mn}(a)$$

$$P_{mn}(a) = j\rho c \frac{h_n^{(1)}(ka)}{h_n^{(1)'}(kr)} V_{r,mn}(r)$$

## 球面調和関数展開による音場の外挿

- 動径方向の伝播は  $n$  のみに依存し,  $m$  には依存しない。
- したがってエバネッセント波となる条件も  $n$  のみに依存し,

$$n > ka$$

のときにべき乗則にしたがって波が減衰する。

## 球面調和関数展開による音場の外挿

- 次に内部問題について考える。半径  $r = b$  の球面上の音圧分布から内部の音場を求める。内部問題の一般解を思い出すと、

$$p(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} j_n(kr) Y_n^m(\theta, \phi)$$

- 外部問題のときと同様に、 $P_{mn}(b) = A_{mn} j_n(kb)$  となるので、

$$p(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{j_n(kr)}{j_n(kb)} P_{mn}(b) Y_n^m(\theta, \phi)$$

- よって、球面波スペクトルにおける内部音場の場合の音場外挿は、

$$P_{mn}(r) = \frac{j_n(kr)}{j_n(kb)} P_{mn}(b)$$



## 球面調和関数展開による音場の外挿

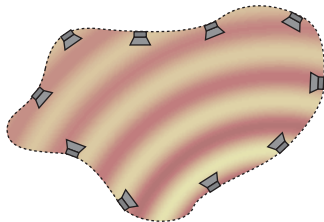
- 円筒調和関数展開の場合と同様に，内部音場の外挿では**禁止周波数の問題**が生じる。
- 内部音場の外挿は，

$$P_{mn}(r) = \frac{j_n(kr)}{j_n(kb)} P_{mn}(b)$$

となり，分母の球 Bessel 関数は多数の零点を持つような実数関数であるため， $j_n(kb) = 0$  となる波数  $k$  においては，上式が無限大に発散し，計算できない。

## 音場の合成 🤔

- 複数のスピーカ（二次音源と呼ぶ）を用いて、対象領域内に所望の音場を合成
- 応用例：
  - 高臨場感音響再生（VR/AR 音響）、エリア再生、空間騒音制御
- 所与の音場を合成するための二次音源の駆動信号を求める、一種の逆問題

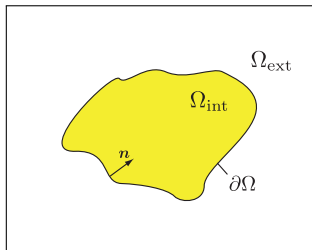


## 音場の合成 🤔

- Single layer potential によれば，音源を含まない内部領域の音場は，境界面上の自由空間 Green 関数の重み付き積分によって表現できる (cf. 第9回の資料)。

$$p(\mathbf{r}) = \int_{\partial\Omega} \mu(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

- 二次音源を  $\partial\Omega$  上の連続的な点音源の分布としてみれば，各二次音源の駆動信号を  $\mu(\mathbf{r}')$  とすることで，領域内部に任意の音場を再現できることになる。



## 音場の合成 🤔

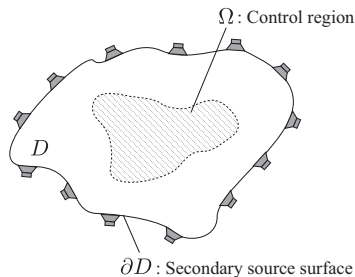
- 残念ながら，駆動信号である  $\mu(\mathbf{r}')$  を解析的な形で得られるのは， $\partial\Omega$  が単純な形状の場合に限られる。
- 例えば， $\partial\Omega$  を無限大平面とし，対象領域を  $z > 0$  の半空間とすれば，Single layer potential は第 1 種 Rayleigh 積分に一致する。

$$p(\mathbf{r}) = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p(x', y', 0)}{\partial z'} G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') dx' dy'$$

- よって，境界面  $\partial\Omega$  における所望音場の  $z$  方向の音圧勾配を二次音源の駆動信号とすればよい。これを**波面合成法: Wave field synthesis (WFS)** と呼ぶ [Spors+ 2008]。
- $\partial\Omega$  が球面の場合は本講義資料の最後に付した。**高次アンビソニックス: Higher-order Ambisonics (HOA)** と呼ばれる音場合成法に相当 [Poletti 2005]。

## 音場の合成 🤔

- 境界面の形状が制約されるということは、スピーカ配置が制限されるという実用上の問題につながる。また、各二次音源を点音源とする仮定も現実的には成り立たない場合が多い。
- 任意形状の境界面  $\partial D$  上に離散的に配置された  $L$  個の二次音源を用いて、対象領域  $\Omega$  内に所望の音場  $p^{\text{des}}(\mathbf{r})$  を合成する場合を考える。



## 音場の合成 🤔

- この場合，以下の最小化問題の解となるような駆動信号  $d \in \mathbb{C}^L$  を求めればよい。

$$\underset{d \in \mathbb{C}^L}{\text{minimize}} \int_{\Omega} \left| \underbrace{\sum_{l=1}^L d_l g_l(\mathbf{r})}_{\text{合成音場}} - p^{\text{des}}(\mathbf{r}) \right|^2 d\mathbf{r}$$

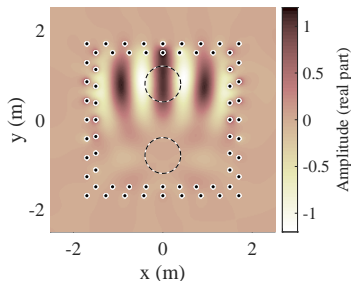
ここで， $d_l$  は  $d$  の  $l$  番目の要素， $g_l$  は  $l$  番目の二次音源の伝達関数。

- この最小化問題を解くことは領域積分があることから困難であり，
  - 領域  $\Omega$  を離散化することで元の問題を近似する方法: **Pressure matching** [Kirkeby&Nelson 1993, Koyama+ 2020]
  - 音場を球波動関数展開によって表現することに基づく方法: **Mode matching** [Poletti 2005, Ueno+ 2019]

などが用いられる。

# 音場の合成 🤔

- Weighted Mode-matching 法によるマルチゾーン音場合成の例 [Ueno+ 2019]
  - 上側の領域で  $0^\circ$  方向の平面波，下側の領域で無音の領域を合成し，二次音源の外側で外部放射を抑圧。



**Figure:** 上側と下側の丸い破線が対象領域，黒い点が二次音源位置を表す。

# 本日の目次

## ① フーリエ音響学 (2)

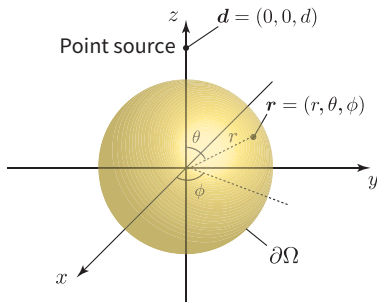
音場の球波動関数展開

音場の境界値積分表現の具体例



## 球状領域の Kirchhoff-Helmholtz 積分方程式

- 境界が球面の場合の内部問題において，球面波スペクトルの領域で内部の音場を求めることができることを見た。
- 前回出てきた Kirchhoff-Helmholtz 積分方程式では任意の境界面の内部を決定する式だったが，その具体例として，同様に境界を球面とした場合を考えてみる。
- 境界面を半径  $R$  の球面とし， $z$  軸上の位置  $z = d$  に点音源が存在するとする。



## 球状領域の Kirchhoff-Helmholtz 積分方程式

- このとき、内部問題のための Kirchhoff-Helmholtz 積分方程式は、

$$p(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \frac{\partial p(\mathbf{r}')}{\partial r'} - p(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial r'} \right) R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

- 位置  $\mathbf{d} = (0, 0, d)$  の点音源による音場  $p(\mathbf{r})$  が、

$$p(\mathbf{r}) = p_0 \frac{e^{jk\|\mathbf{r}-\mathbf{d}\|}}{jk\|\mathbf{r}-\mathbf{d}\|} = p_0 h_0^{(1)}(k\|\mathbf{r}-\mathbf{d}\|)$$

と書けるとする。ここで、以下の関係式を用いた。

$$h_0^{(1)}(x) = \frac{e^{jx}}{jx}$$

## 球状領域の Kirchhoff-Helmholtz 積分方程式

- 球 Hankel 関数の展開公式より,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}) &= p_0 h_0(k\|\mathbf{r} - \mathbf{d}\|) \\ &= p_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) j_n(kr) h_n^{(1)}(kd) P_n(\cos\theta) \end{aligned}$$

ここで、 $P_n(\cdot)$  は  $m = 0$  のときの Legendre 陪関数であり Legendre 多項式と呼ばれる。また、以下が成り立つことに注意。

$$Y_n^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} P_n(\cos\theta)$$

- よって、これを  $r$  に関して微分すると,

$$\frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial r} = kp_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) j_n'(kr) h_n^{(1)}(kd) P_n(\cos\theta)$$

- 以上の式から、半径  $R$  の球面上の音圧と音圧勾配が得られる。

# 球状領域の Kirchhoff-Helmholtz 積分方程式

- 次に、Kirchhoff-Helmholtz 積分方程式に現れる 3次元自由空間 Green 関数について考える。
- 3次元自由空間 Green 関数の球波動関数展開は、

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= \frac{e^{jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} \\
 &= jk \sum_{n=0}^{\infty} j_n(kr) h_n^{(1)}(kr') \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta', \phi')^* Y_n^m(\theta, \phi)
 \end{aligned}$$

- さらに、この法線方向微分は、

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial r'} = jk^2 \sum_{n=0}^{\infty} j_n(kr) h_n^{(1)'}(kr') \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta', \phi')^* Y_n^m(\theta, \phi)$$

## 球状領域の Kirchhoff-Helmholtz 積分方程式

- 以上の結果を Kirchhoff-Helmholtz 積分方程式に代入すればよい。
- $\phi'$  に関する積分は、依存する項が  $Y_n^m(\theta', \phi')^*$  のみなので、

$$\int Y_n^m(\theta', \phi')^* d\phi' = \sqrt{\pi(2n+1)} P_n(\cos \theta') \delta_{m0}$$

となり、 $m$  に関する総和が消える。

- さらに、 $\theta$  に関する積分は、 $P_n(\cos \theta)$  の直交性から、 $p$  と  $G$  の  $n$  が同じ項のみが取り出されることになるため、結果として、

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}) &= j(kR)^2 p_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) P_n(\cos \theta') \\ &\quad \cdot h_n^{(1)}(kd) j_n(kr) \left[ h_n^{(1)}(kR) j_n'(kR) - h_n^{(1)'}(kR) j_n(kR) \right] \\ &= p_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) h_n^{(1)}(kd) j_n(kr) P_n(\cos \theta) \end{aligned}$$

ここで球 Bessel 関数の Wronskian の式を用いた。

# 球状領域の Kirchhoff-Helmholtz 積分方程式

- 同じ内部問題を球面波スペクトルの領域で考えてみる。

$$p(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{j_n(kr)}{j_n(kR)} P_{mn}(R) Y_n^m(\theta, \phi)$$

- 位置  $d$  の点音源による球面波スペクトル  $P_{mn}(R)$  は、先程の式より、

$$P_{mn}(R) = p_0 (-1)^n \sqrt{4\pi(2n+1)} j_n(kR) h_n^{(1)}(kd) \delta_{m0}$$

- これを代入すると、

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n p_0 (-1)^n j_n(kr) \sqrt{4\pi(2n+1)} h_n^{(1)}(kd) \delta_{m0} Y_n^m(\theta, \phi) \\ &= p_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) h_n^{(1)}(kd) j_n(kr) P_n(\cos \theta) \end{aligned}$$

よって、Kirchhoff-Helmholtz 積分方程式で考えた場合と同じ式が得られることがわかる。

# 球状領域の内部問題に関する Neumann 型 Green 関数

- 半径  $R$  の球状境界面において Neumann 境界条件 (音圧勾配が 0) を満たす Green 関数 (Neumann 型 Green 関数)  $G_N$  を求めたい。
- まず, 3次元自由空間 Green 関数の球波動関数展開は, 位置  $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi) \in \Omega \setminus \partial\Omega$ ,  $\mathbf{r}' = (r', \theta', \phi') \in \partial\Omega$  に関して,

$$G = \frac{e^{jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} = jk \sum_{n=0}^{\infty} j_n(kr)h_n^{(1)}(kr') \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta', \phi')^* Y_n^m(\theta, \phi)$$

- Neumann 型 Green 関数  $G_N = G + g_N$  が  $r' = R$  において  $\partial G_N / \partial n' = 0$  となることより,

$$\left. \frac{\partial G_N}{\partial n'} \right|_{r'=R} = \left( \frac{\partial G}{\partial r'} + \frac{\partial g_N}{\partial r'} \right) \Big|_{r'=R} = 0$$

また,

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n'} \right|_{r'=R} = jk^2 \sum_{n=0}^{\infty} j_n(kr)h_n^{(1)}(kR) \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta', \phi')^* Y_n^m(\theta, \phi)$$

# 球状領域の内部問題に関する Neumann 型 Green 関数

- したがって、Neumann 境界条件を満たすような  $g_N$  は、

$$g_N(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -jk \sum_{n=0}^{\infty} j_n(kr) \frac{h_n^{(1)'}(kR)}{j_n'(kR)} j_n(kr') \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta', \phi')^* Y_n^m(\theta, \phi)$$

- 以上により、Neumann 型 Green 関数は、

$$G_N(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = jk \sum_{n=0}^{\infty} j_n(kr) \left[ h_n^{(1)}(kr') - \frac{h_n^{(1)'}(kR)}{j_n'(kR)} j_n(kr') \right] \cdot \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta', \phi')^* Y_n^m(\theta, \phi)$$

- $r' = R$  とすれば Wronskian の式によって単純化される。

$$G_N(\mathbf{r}|\mathbf{r}')|_{r'=R} = \frac{1}{kR^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j_n(kr)}{j_n'(kR)} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta', \phi')^* Y_n^m(\theta, \phi)$$



# 球状領域の内部問題に関する Neumann 型 Green 関数

- 動径方向速度を球状領域の境界条件とし，内部問題を波数領域で解く場合に，等価な Neumann 型 Green 関数が得られることを見る。
- $j\rho c v_r = \partial p(\mathbf{r})/\partial r$  より， $r = R$  での動径方向速度は，

$$v_r(R, \theta, \phi) = \frac{1}{j\rho c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{mn} j'_n(kR) Y_n^m(\theta, \phi)$$

- 未知係数  $A_{mn}$  に関して解くと，

$$A_{mn} = \frac{j\rho c}{j'_n(kR)} \int v_r(R, \theta, \phi) Y_n^m(\theta', \phi')^* \sin \theta d\theta' d\phi'$$

- これを内部問題の一般解に代入すれば，

$$p(r, \theta, \phi) =$$

$$j\rho c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j_n(kr)}{j'_n(kR)} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \phi) \int v_r(R, \theta', \phi') Y_n^m(\theta', \phi')^* \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

# 球状領域の内部問題に関する Neumann 型 Green 関数

- $v_r(R, \theta, \phi)$  の球面調和関数展開,

$$V_{r,mn}(R) = \int v_r(R, \theta', \phi') Y_n^m(\theta', \phi')^* \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

を考えると,

$$p(r, \theta, \phi) = j\rho c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j_n(kr)}{j'_n(kR)} \sum_{m=-n}^n V_{r,mn}(R) Y_n^m(\theta, \phi)$$

- 上式の  $V_{r,mn}$  を代入すれば, Neumann 型 Green 関数の形が以下のようになれる。

$$p(r, \theta, \phi) = j\rho c k R^2 \int G_N(r, \theta, \phi | R, \theta', \phi') v_r(R, \theta', \phi') d\theta' d\phi'$$

$$G_N(r, \theta, \phi | R, \theta', \phi') = \frac{1}{kR^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j_n(kr)}{j'_n(kR)} \sum_{m=-n}^m Y_n^m(\theta, \phi) Y_n^m(\theta', \phi')^*$$

## 剛体球による平面波の散乱

- 半径  $R$  の球状の剛体散乱体によって平面波が散乱される場合を考える。
- 入射音場  $p_{\text{inc}}$  を振幅  $p_0$ ，波数ベクトル  $\mathbf{k}_{\text{inc}} = k(\sin \theta_{\text{inc}} \cos \phi_{\text{inc}}, \sin \theta_{\text{inc}} \sin \phi_{\text{inc}}, \cos \theta_{\text{inc}})$  の平面波音場とする。平面波関数の球波動関数展開の公式を用いれば，

$$\begin{aligned} p_{\text{inc}}(\mathbf{r}) &= p_0 e^{j\mathbf{k}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{r}} \\ &= 4\pi p_0 \sum_{n=0}^{\infty} j^n j_n(kr) \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \phi) Y_n^m(\theta_{\text{inc}}, \phi_{\text{inc}})^* \end{aligned}$$

- 全体の音場  $p_{\text{tot}}$  は，入射音場  $p_{\text{inc}}$  と散乱音場  $p_{\text{sct}}$  との和で表現できる。

$$p_{\text{tot}}(\mathbf{r}) = p_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + p_{\text{sct}}(\mathbf{r})$$

## 剛体球による平面波の散乱

- 剛体球では、球表面  $r = R$  において、動径方向の粒子速度が 0 となる。したがって、以下の境界条件が与えられる。

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} (p_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + p_{\text{sct}}(\mathbf{r})) \right|_{r=R} = 0$$

- 散乱音場は外部問題の一般解と同じ形で表現できるため、

$$p_{\text{sct}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{mn} h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\theta, \phi)$$

- これと入射音場の式を境界条件に代入すれば、 $C_{mn}$  は以下のように表せる。

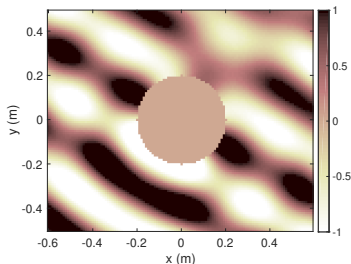
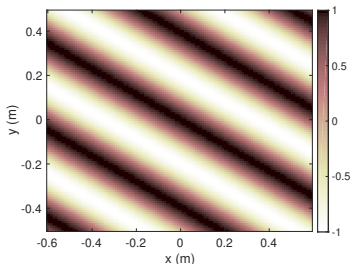
$$C_{mn} = -4\pi p_0 j^n \frac{j_n'(kR)}{h_n^{(1)'}(kR)} Y_n^m(\theta_{\text{inc}}, \phi_{\text{inc}})^*$$

# 剛体球による平面波の散乱

- したがって、全体の音場は、

$$p_{\text{tot}}(\mathbf{r}) = 4\pi p_0 \sum_{n=0}^{\infty} j^n \left( j_n(kr) - \frac{j'_n(kR)}{h_n^{(1)'}(kR)} h_n^{(1)}(kr) \right) \cdot \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \phi) Y_n^m(\theta_{\text{inc}}, \phi_{\text{inc}})^*$$

- 剛体バッフルが半径  $R = 0.2 \text{ m}$  のときの平面波の散乱。



## 球状領域の Single layer potential 🤔

- Single layer potential は、3次元自由空間 Green 関数のみを核関数とした積分方程式による音場の表現であった。

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{r}) &= \int_{\partial\Omega} \mu(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\
 &= \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial p_{\text{ext}}(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} - \frac{\partial p_{\text{int}}(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} \right) G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') d\mathbf{r}'
 \end{aligned}$$

- ここでは領域を半径  $R$  の球状とし、内部領域の音場が以下のように与えられる場合の single layer potential による積分表現を導出することを考える。

$$p_{\text{int}}(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{mn} j_n(kr) Y_n^m(\theta, \phi)$$

## 球状領域の Single layer potential 🤔

- 外部領域の音場は球波動関数展開係数  $B_{nm}$  を用いて、以下のように書ける。

$$p_{\text{ext}}(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_{mn} h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\theta, \phi)$$

- 境界面  $r = R$  において、音圧  $p_{\text{int}}(R, \theta, \phi)$  と  $p_{\text{ext}}(R, \theta, \phi)$  が等しいことから、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{mn} j_n(kR) Y_n^m(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_{mn} h_n^{(1)}(kR) Y_n^m(\theta, \phi)$$

$$\Rightarrow B_{mn} = \frac{j_n(kR)}{h_n^{(1)}(kR)} A_{mn}$$

# 球状領域の Single layer potential 🤔

- $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$  より,

$$\left. \frac{\partial p_{\text{int}}}{\partial r} \right|_{r=R} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n k A_{mn} j'_n(kR) Y_n^m(\theta, \phi)$$

$$\left. \frac{\partial p_{\text{ext}}}{\partial r} \right|_{r=R} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n k A_{mn} \frac{j_n(kR)}{h_n^{(1)}(kR)} h_n^{(1)'}(kR) Y_n^m(\theta, \phi)$$

- 以上により, Wronskian の式を用いれば,

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{r}) &= - \left. \frac{\partial p_{\text{ext}}(\mathbf{r})}{\partial r} \right|_{r=R} + \left. \frac{\partial p_{\text{int}}(\mathbf{r})}{\partial r} \right|_{r=R} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n k A_{mn} \left( j'_n(kR) - \frac{h_n^{(1)'}(kR)}{h_n^{(1)}(kR)} j_n(kR) \right) Y_n^m(\theta, \phi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{A_{mn}}{jkR^2 h_n^{(1)}(kR)} Y_n^m(\theta, \phi) \end{aligned}$$



## 参考文献 I



E. G. Williams (1999)

Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography  
[Academic Presss, Cambridge.](#)



D. Colton and R. Kress (2013)

Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory  
[Springer, New York.](#)



S. Spors, R. Rabenstein, and J. Ahrens (2008)

The theory of wave field synthesis revisited  
[Proc. 124th AES Conv., Amsterdam.](#)



M. A. Poletti (2005)

Three-dimensional surround sound systems based on spherical harmonics  
[J. Audio Eng. Soc., vol. 53, no. 11.](#)

## 参考文献 II



O. Kirkeby and P. A. Nelson (1993)

Reproduction of plane wave sound fields

[J. Acoust. Soc. Am., vol. 94, no. 5.](#)



N. Ueno, S. Koyama, and H. Saruwatari (2019)

Three-dimensional sound field reproduction based on weighted mode-matching method

[IEEE/ACM Trans. ASLP, vol. 28.](#)



S. Koyama, G. Chardon, and L. Daudet (2020)

Optimizing source and sensor placement for sound field control: an overview

[IEEE/ACM Trans. ASLP, vol. 28.](#)