

応用音響学 第10回

フーリエ音響学 (1)

小山 翔一

東京大学 大学院情報理工学系研究科 システム情報学専攻

2021/6/18

講義スケジュール

■ S セメスター 金曜 2 限 (10:25-12:10) @オンライン

■ 日程

4/9	第 1 回	} 猿渡先生	5/21	第 7 回	} 小山
4/16	第 2 回		5/28	休講	
4/23	第 3 回		6/4	第 8 回	
4/30	第 4 回		6/11	第 9 回	
5/7	第 5 回		6/18	第 10 回	
5/14	第 6 回		6/25	休講	
			7/2	第 11 回	
			7/9	第 12 回	

講義目的

■ 講義前半（猿渡先生担当）

- 音声分析，音声符号化，音声認識，音声合成，音響信号処理などに関連する基礎知識について講義する。応用として，携帯電話やMP3などの音声音楽情報圧縮技術や音声認識技術・音声合成システムなどがある。統計的信号処理の基礎，スペクトル解析，パターン認識，確率モデル，統計学習，最適解探策などの基本概念とアルゴリズムを理解し，これらの技術の基礎になる知識と概念の習得を目指す。

■ 講義後半（小山担当）

- 音響現象の数理的なモデリング方法を理解することを目的とし，音波の伝播，反射，回折，散乱などの現象を数学的に記述するための基礎事項について講義する。応用として，音源位置の推定や音場の可視化，音のVR/ARや騒音・振動制御，音響数値シミュレーションなどがある。これらの基本概念を理解することで，様々な波動場の計測・制御技術の基礎となる知識の習得を目指す。

講義後半の概要

■ 講義内容（予定）

- 5/21: 音波の伝播
- 6/4: 音響管・自由空間中の音波
- 6/11: 音場の境界値積分表現
- 6/18: フーリエ音響学 (1)
- 7/2: フーリエ音響学 (2)
- 7/9: 室内音響学と音響数値シミュレーション

■ 参考文献

- 安田仁彦, "機械音響学," コロナ社, 2004.
- E. G. Williams, "*Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*," Academic Press, 1999.

講義資料と成績評価

■ 講義資料

- ITC-LMS に前日までにアップロード予定
- <http://www.sh01.org/ja/teaching/>
あるいはシステム1研のウェブサイトからもたどれます

■ 成績評価

- レポート or オンライン試験 (7/30)

本日の目次

- ① フーリエ音響学 (1)
 - 音場の平面波展開
 - 音場の円筒波動関数展開

本日の目次

- ① フーリエ音響学 (1)
 - 音場の平面波展開
 - 音場の円筒波動関数展開

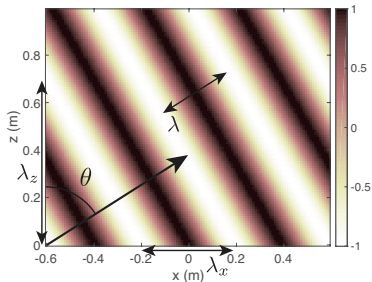
音場の平面波展開

- 直交座標系での斉次 Helmholtz 方程式の一般解は、位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ 、波数ベクトル $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)^T$ として、以下の平面波関数となる。(cf. 第 7 回の資料)

$$p(\mathbf{r}) = p_0 e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

ただし $\|\mathbf{k}\|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$ 。

- もし x - y 平面上の波数 k_x, k_y が決まれば、 z 方向の波数 k_z も決まる。



音場の平面波展開

- 音源がない半空間 $z > 0$ の音圧分布は、平面波の線形和（平面波展開）として一意にかつ完全に記述できる。
- x - y 平面上の音圧分布 $p(x, y, 0)$ を構成する平面波の振幅と位相を $P(k_x, k_y)$ と表せば、

$$p(x, y, z) = \sum_{k_x} \sum_{k_y} P(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

- 一般的には、 x - y 平面上の音圧分布は、 x および y 方向に無限の広がりを仮定しているため、連続の波数空間として取り扱うことができる。

$$p(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y P(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

ただし、 $z > 0$ 方向への伝播を表すことより、 $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ 。

音場の平面波展開

- ここで $z = 0$ とすると,

$$p(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y P(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y)}$$

となり, $P(k_x, k_y)$ の 2次元逆 Fourier 変換が $z = 0$ における音圧分布 $p(x, y, 0)$ に等しいことがわかる。

- 逆に言えば, $P(k_x, k_y)$ は, $z = 0$ における任意の音圧分布 $p(x, y, 0)$ の 2次元 Fourier 変換によって得られる。

$$P(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy p(x, y, 0) e^{-j(k_x x + k_y y)}$$

- ここで, $P(k_x, k_y)$ は**角度スペクトル** (angular spectrum) と呼ばれ, $p(x, y, 0)$ の**波数領域表現** と呼ばれる。

平面波展開による音場の外挿

- これまでの結果から、 $z = 0$ における音圧分布から $P(k_x, k_y)$ が得られれば、 $z > 0$ の半空間における音場を計算できることがわかる。
- 角度スペクトルの位相シフトの形に書き換えれば、 $z =$ 一定の面における音圧分布 $p(x, y, z)$ の Fourier 変換と $z = 0$ の面における $p(x, y, 0)$ 音圧分布の Fourier 変換との関係は、

$$\mathcal{F}_x \mathcal{F}_y [p(x, y, z)] = P(k_x, k_y, z) = P(k_x, k_y) e^{jk_z z}$$

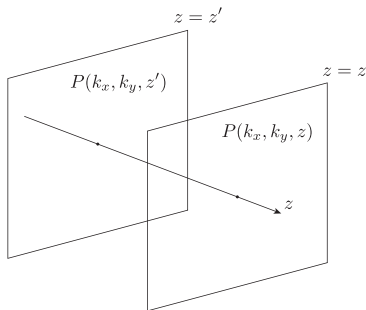
ここで $P(k_x, k_y, 0) = P(k_x, k_y)$ と定義している。

平面波展開による音場の外挿

平面波展開による音場の外挿

音源のない半空間 $z > 0$ に関して、 $z = z'$ の面から $z = z > z'$ の面への音場外挿は、以下のように書ける。

$$P(k_x, k_y, z) = P(k_x, k_y, z')e^{jk_z(z-z')}$$



平面波展開による音場の外挿

- z が一定の面における音圧分布と粒子速度分布に関しても波数領域表現での関係が得られる。
- まず, z 方向の粒子速度分布 $v_z(x, y, z)$ の 2 次元 Fourier 変換を定義。

$$V_z(k_x, k_y, z) = \mathcal{F}_x \mathcal{F}_y [v_z(x, y, z)]$$

- z 方向の音圧勾配に関する外挿は,

$$\mathcal{F}_x \mathcal{F}_y \left[\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} \right] = \frac{\partial P(k_x, k_y, z)}{\partial z} = jk_z P(k_x, k_y, z') e^{jk_z(z-z')}$$

- したがって, $z = z'$ の面における音圧分布と $z = z > z'$ の面における粒子速度分布が波数領域で関係付けられる。

$$V_z(k_x, k_y, z) = \frac{k_z}{\rho c k} P(k_x, k_y, z') e^{jk_z(z-z')}$$

ここで, $j\rho c k V_z = \partial P / \partial z$ の関係を用いた。

Rayleigh 積分との関係

- 波数領域での位相シフトと同様に、平面境界からの音場の伝播を記述する Rayleigh 積分との関係を考える。
- 音圧分布の波数領域での外挿の式を逆 Fourier 変換することを考えると、

$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= \mathcal{F}_x^{-1} \mathcal{F}_y^{-1} \left[P(k_x, k_y, z') e^{jk_z(z-z')} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(k_x, k_y, z') e^{jk_z(z-z')} e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \end{aligned}$$

- $G_p(k_x, k_y, z - z') = e^{jk_z(z-z')}$ とおくと、上式は $P(k_x, k_y, z')$ と $G_p(k_x, k_y, z - z')$ の空間領域における x, y に関する畳み込みとなる。

$$p(x, y, z) = \iint p(x', y', z') g_p(x - x', y - y', z - z') dx' dy'$$

ここで、 $p(x', y', z') = \mathcal{F}_x^{-1} \mathcal{F}_y^{-1} [P(k_x, k_y, z')]$ 、
 $g_p(x - x', y - y', z - z') = \mathcal{F}_x^{-1} \mathcal{F}_y^{-1} [G_p(k_x, k_y, z - z')]$ とした。

Rayleigh 積分との関係

- g_p を計算すると,

$$\begin{aligned}
 g_p(x - x', y - y', z - z') &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j[k_x(x-x') + k_y(y-y')]} e^{j(z-z')\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z'} \frac{e^{jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}
 \end{aligned}$$

- 3 番目の式は Weyl の積分によって与えられる。

$$\frac{e^{jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} = \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j[k_x(x-x') + k_y(y-y')]} \frac{e^{jk_z|z-z'|}}{k_z} dk_x dk_y$$

これを z' に関して微分し, $z > z'$ に制限すればよい。

Rayleigh 積分との関係

- g_p を先程の式に代入すると、以下の第 2 種 Rayleigh 積分が得られる。

$$p(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint p(x', y', z') \frac{\partial}{\partial z'} \frac{e^{jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} dx' dy'$$

- 第 1 種 Rayleigh 積分については、以下の粒子速度分布と音圧分布の波数領域での関係式から出発し、同様の手続きで導出できる。

$$P(k_x, k_y, z) = \rho c k V_z(k_x, k_y, z') \frac{e^{jk(z-z')}}{k_z}$$

- z 方向の粒子速度分布 v_z を使って書くと、第 1 種 Rayleigh 積分は、

$$p(x, y, z) = -\frac{j\rho c k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_z(x', y', z') \frac{e^{jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} dx' dy'$$

より一般的な音場の平面波展開 🤔

- ここでは音源を含まない半空間の音場を平面波の重ね合わせとして表現した。
- より一般には、音源を含まない単連結領域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ において、音圧分布 $p(\mathbf{r})$ は平面波の重み付き積分として表現でき、これを **Herglotz 波動関数**と呼ぶ [Colton&Kress 2013, Ueno+ 2021]。

$$p(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{S}_2} \tilde{p}(\boldsymbol{\eta}) e^{-jk\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{r}} d\boldsymbol{\eta} \quad (\mathbf{r} \in \Omega)$$

ここで、 \mathbb{S}_2 は単位球面、 $\boldsymbol{\eta}$ は平面波の到来方向 ($\mathbf{k} = -k\boldsymbol{\eta}$, i.e., 伝播方向の逆)、 $\tilde{p} \in L_2(\mathbb{S}_2)$ は平面波の重みを表す。

- 音場の補間・推定をはじめとする逆問題を扱う上で重要な表現。

具体例：バッフルで囲われた正方形ピストン

- $z = 0$ の平面上での正方形のピストンによる音場を考える。周波数領域での粒子速度の分布を以下のように与える。

$$v_z(x, y, 0) = \begin{cases} 1 & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}, \quad -\frac{L}{2} < y < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$-1/2 < x < 1/2$ の範囲で 1 となる矩形関数 $\Pi(x)$ を用いて表すと,

$$v_z(x, y, 0) = \Pi\left(\frac{x}{L}\right) \Pi\left(\frac{y}{L}\right)$$

- $z = 0$ の面における粒子速度分布の波数領域表現を考えると,

$$V_z(k_x, k_y, 0) = L^2 \operatorname{sinc}\left(k_x \frac{L}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(k_y \frac{L}{2}\right)$$

具体例：バッフルで囲われた正方形ピストン

- $z = z$ の面における波数領域での音圧分布 $P(k_x, k_y, z)$ との関係は,

$$\begin{aligned} P(k_x, k_y, z) &= \rho c k V_z(k_x, k_y, 0) \frac{e^{jk_z z}}{k_z} \\ &= \rho c k L^2 \operatorname{sinc}\left(k_x \frac{L}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(k_y \frac{L}{2}\right) \frac{e^{jk_z z}}{k_z} \end{aligned}$$

- ここで、この正方形ピストンによる遠距離場の指向性関数について考える。遠距離場においては $\|\mathbf{r}\| \gg \|\mathbf{r}'\|$ となるので,

$$\frac{e^{jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} \approx \frac{e^{jk\|\mathbf{r}\|}}{\|\mathbf{r}\|} e^{-j(k_x x' + k_y y')}$$

と近似できる。

具体例：バッフルで囲われた正方形ピストン

- この近似を用いると、第 1 種 Rayleigh 積分は、

$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= -j\rho ck \frac{e^{jk\|\mathbf{r}\|}}{2\pi\|\mathbf{r}\|} \iint v_z(x', y', 0) e^{-j(k_x x' + k_y y')} dx' dy' \\ &= -j\rho ck \frac{e^{jk\|\mathbf{r}\|}}{2\pi\|\mathbf{r}\|} V_z(k_x, k_y, 0) \end{aligned}$$

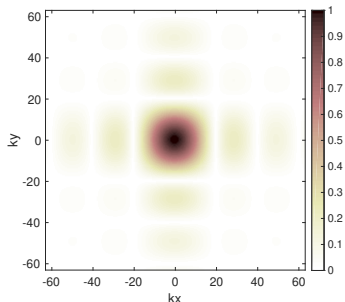
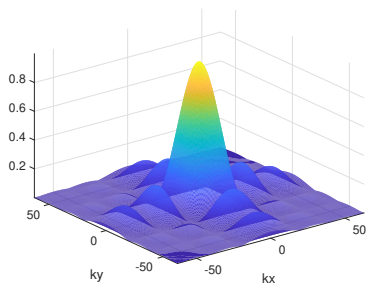
- 指向性関数の定義 (cf. 第 8 回の資料) から、

$$\begin{aligned} D(\theta, \phi) &= \frac{-j\rho ck}{2\pi} V_z(k_x, k_y, 0) \\ &= \frac{-j\rho ckL^2}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{kL}{2} \sin\theta \cos\phi\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{kL}{2} \sin\theta \sin\phi\right) \end{aligned}$$

ここで、 $k_x = k \sin\theta \cos\phi$ 、 $k_y = k \sin\theta \sin\phi$ を用いた。

具体例：バッフルで囲われた正方形ピストン

- $k = 3.7 \text{ rad/m}$, $L = 0.1 \text{ m}$ のときの指向性関数を $D(\theta, \phi) = V_z(k_x, k_y)/L^2$ としてプロット。



音響ホログラフィ/音場再構成 🤔

- ここでは音の伝播方向に音場を外挿する方法として、Rayleigh 積分や平面波展開を導入したが、伝播の逆方向への音場の推定を**音響ホログラフィ**あるいは**音場再構成**と呼ぶ。
- 例えば、音場の可視化による騒音源の特定などに用いられる。

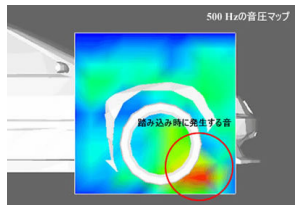
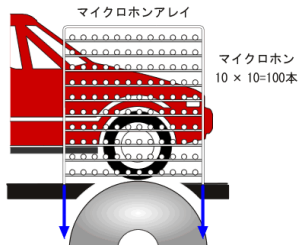
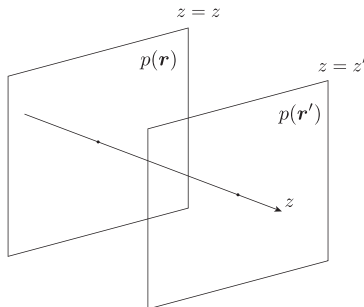


Figure: <https://www.onosokki.co.jp/HP-WK/products/application/hologram.htm> より

音響ホログラフィ/音場再構成 🤔

- 音源のない半空間 $z > 0$ に関して、 $z = z'$ の面から $z = z < z'$ の面への音場の推定を考える。



音響ホログラフィ/音場再構成 🤔

- Rayleigh 積分と同様の形で、積分方程式としてこの逆伝播が得られるとする。

$$p(x, y, z) = \iint p(x', y', z') K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dx' dy'$$

- 波数領域において、 $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ のエバネッセント波成分を無視すれば、核関数 $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は以下のようなになる [Wolf&Shewell]。

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z'} \frac{e^{jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}$$

- 第2種 Rayleigh 積分の核関数の位相を反転したものに相当。

音響ホログラフィ/音場再構成 🤔

- 積分方程式を用いた推定では、エバネッセント波成分を無視しているため、推定の空間解像度に限界が生じる。
- 逆伝播の推定そのものを波数領域で行うことも可能であり、順伝播の場合と同様に角度スペクトルの位相シフトとして得られる。

$$P(k_x, k_y, z) = P(k_x, k_y, z')e^{jk_z(z-z')}$$

このような推定法を**近距離場音響ホログラフィ (Nearfield Acoustic Holography: NAH)**と呼ぶ。

- この場合はエバネッセント波成分も含めた推定が可能であるが、雑音耐性を高めるためにはこれらの成分をある程度抑えるような窓かけ（波数空間フィルタ）が必要。

本日の目次

① フーリエ音響学 (1)

音場の平面波展開

音場の円筒波動関数展開

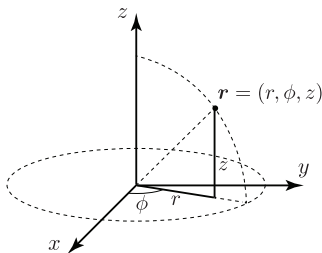
円筒座標系での波動方程式

- 円筒座標系 (r, ϕ, z) での波動方程式について考える。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p = 0$$

- 円筒座標系における gradient と Laplace 演算子は,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$



円筒座標系での波動方程式

- 変数分離法を用いて、解を以下のように書く。

$$p(r, \phi, z, t) = R(r)\Phi(\phi)Z(z)T(t)$$

- これを波動方程式に代入し、 $R\Phi ZT$ で割ると、

$$\left(\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{d\Phi}{d\phi^2} \right) + \left(\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \right) = \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2}$$

- 各項が定数でなければならないことから、任意定数 k , k_z を用いて、

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2$$

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{d\Phi}{d\phi^2} = -k^2 + k_z^2 = -k_r^2$$

ただし、 $k_r = \sqrt{k^2 - k_z^2}$ 。

円筒座標系での波動方程式

- 3番目の式を書き換えると,

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + k_r^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}$$

となることから、右辺と左辺が等しい定数となるはず。この定数を n^2 とおけば,

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -n^2$$
$$\left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \left(k_r^2 r^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0$$

2つ目の式は Bessel 方程式と呼ばれる。

円筒座標系での波動方程式

- 以上により，一般解は任意定数 $T_1, T_2, Z_1, Z_2, \Phi_1, \Phi_2, R_1, R_2$ を用いて，

$$T(t) = T_1 e^{-j\omega t} + T_2 e^{j\omega t}$$

$$Z(z) = Z_1 e^{jk_z z} + Z_2 e^{-jk_z z}$$

$$\Phi(\phi) = \Phi_1 e^{jn\phi} + \Phi_2 e^{-jn\phi}$$

$$R(r) = R_1 J_n(k_r r) + R_2 N_n(k_r r)$$

- 動径方向関数 $R(r)$ に関して， $J_n(\cdot)$ ， $N_n(\cdot)$ は Bessel 方程式の一般解である，Bessel 関数（第 1 種 Bessel 関数），Neumann 関数（第 2 種 Bessel 関数）である。第 1 種，第 2 種 Hankel 関数， $H_n^{(1)}(\cdot)$ ， $H_n^{(2)}(\cdot)$ を用いて以下のようにも書ける。

$$R(r) = R_3 H_n^{(1)}(k_r r) + R_4 H_n^{(2)}(k_r r)$$

- 時間依存項の定義から， $T_2 = 0$ 。

Bessel 関数

■ Bessel 関数:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

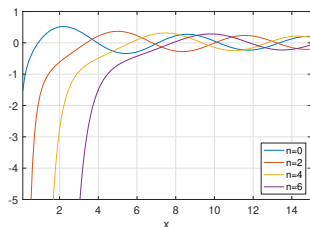
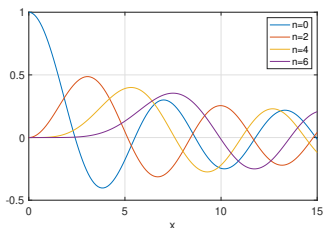
■ Neumann 関数:

$$N_n(x) = \frac{J_n(x) \cos(nx) - J_{-n}(x)}{\sin(nx)}$$

■ 第 1 種, 第 2 種 Hankel 関数:

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + jN_n(x)$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - jN_n(x)$$



円筒座標系での波動方程式

- 円筒座標系での波動方程式に戻れば、各座標ごとの解の組み合わせから一般解を構成できる。
- 周波数領域での一般解は、 n , k_z , ω の変数を持つ2つの係数 $A_n(k_z, \omega)$, $B_n(k_z, \omega)$ を用いて、 n , k_z のすべての可能な値に関して和をとればよいので、

$$p(r, \phi, z, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_n(k_z, \omega) e^{jk_z z} H_n^{(1)}(k_r r) + B_n(k_z, \omega) e^{jk_z z} H_n^{(2)}(k_r r) \right] dk_z$$

- あるいは、

$$p(r, \phi, z, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[C_n(k_z, \omega) e^{jk_z z} J_n(k_r r) + D_n(k_z, \omega) e^{jk_z z} N_n(k_r r) \right] dk_z$$

音場の円筒波動関数展開

- 内部問題では、一般解は円筒境界面の内側に伝播し、原点で有限の値となる必要があるため、

$$p(r, \phi, z, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_n(k_z, \omega) e^{jk_z z} J_n(k_r r) dk_z$$

となる。 $e^{jn\phi} e^{jk_z z} J_n(k_r r)$ は内部問題における**円筒波動関数**。

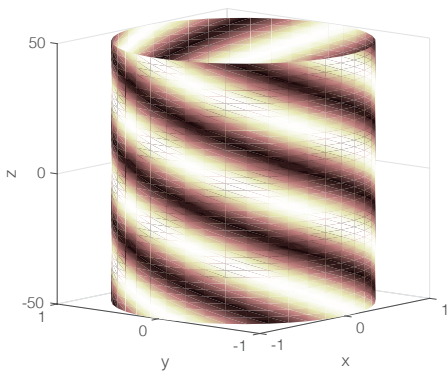
- 外部問題では、一般解は原点で有限の値をとる必要はないが、円筒境界面の外側に伝播する必要があるため、

$$p(r, \phi, z, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_n(k_z, \omega) e^{jk_z z} H_n^{(1)}(k_r r) dk_z$$

となる。 $e^{jn\phi} e^{jk_z z} H_n^{(1)}(k_r r)$ は外部問題における**円筒波動関数**。

音場の円筒波動関数展開

- $k_z = 0.2$, $n = 4$ のときの動径方向関数を除いた円筒波動関数 $e^{jn\phi} e^{jk_z z}$ 。



円筒調和関数展開による音場の外挿

- 直交座標系の場合と同様に，円筒座標系の場合も空間 Fourier 変換による音場の外挿を考えることができる。
- まず外部問題において， $r = a$ の円筒状境界面の音圧分布 $p(a, \phi, z)$ からの放射音場について考える。外部問題の一般解を用いて $p(a, \phi, z)$ を円筒波動関数展開すれば，

$$p(a, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_n(k_z) e^{jk_z z} H_n^{(1)}(k_r a) dk_z$$

- $p(a, \phi, z)$ の r と ϕ に関する 2次元 Fourier 変換 $P_n(r, k_z)$ を考えると，

$$P_n(r, k_z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} p(r, \phi, z) e^{-jn\phi} e^{-jk_z z} dz$$

$$p(r, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_n(r, k_z) e^{jk_z z} dk_z$$

円筒調和関数展開による音場の外挿

- $r = a$ における一般解と比較すれば、 $P_n(a, k_z) = A_n(k_z)H_n^{(1)}(k_r a)$ となるので、

$$p(r, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_n(a, k_z) e^{jk_z z} \frac{H_n^{(1)}(k_r r)}{H_n^{(1)}(k_r a)} dk_z$$

$P_n(r, k_z)$ を平面境界の場合の角度スペクトルに対応して、**ヘリカル波スペクトル**と呼ぶ。

- よってヘリカル波スペクトルにおける外部問題の場合の音場外挿は、以下のようになる。

$$P_n(r, k_z) = \frac{H_n^{(1)}(k_r r)}{H_n^{(1)}(k_r a)} P_n(a, k_z)$$

これにより異なる同心円筒間での波数領域での関係が与えられる。

円筒調和関数展開による音場の外挿

- 粒子速度分布との関係を考えるため、動径方向の粒子速度 v_r と、そのヘリカル波スペクトル $V_{r,n}$ を導入する。

$$V_{r,n}(r, k_z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} v_r(r, \phi, z) e^{-jn\phi} e^{-jk_z z} dz$$

- $j\rho ck V_{r,n} = dP_n(r, k_z)/dr$ より、音圧に関するヘリカル波スペクトルの外挿の式を用いれば、

$$v_r(r, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_r}{j\rho ck} \frac{H_n^{(1)'}(k_r r)}{H_n(k_r a)} P_n(a, k_z) e^{jk_z z} dk_z$$

円筒調和関数展開による音場の外挿

- 以上により，速度スペクトルと音圧スペクトルとの関係は，

$$V_{r,n}(r, k_z) = \frac{k_r}{j\rho ck} \frac{H_n^{(1)'}(k_r r)}{H_n(k_r a)} P_n(a, k_z)$$
$$P_n(a, k_z) = \frac{j\rho ck}{k_r} \frac{H_n(k_r a)}{H_n^{(1)'}(k_r r)} V_{r,n}(r, k_z)$$

円筒調和関数展開による音場の外挿

- 平面波展開の場合と同様に、音の波長が軸方向/円筒周方向に沿った波長よりも長い場合には、エバネッセント波になる。
- 軸方向/円筒周方向の波長は、

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z}, \quad \lambda_\phi = \frac{2\pi a}{n}$$

- $\lambda = 2\pi/k$ より、エバネッセント波となる条件は、

$$k_z > k, \quad n > ka$$

- 軸方向には指数的に、円筒周方向にはべき乗則にしたがって波が減衰する。

円筒調和関数展開による音場の外挿

- 次に内部問題において、 $r = b$ の円筒状境界面の音圧分布 $p(b, \phi, z)$ から内部の音場を求める。内部問題の一般解は、

$$p(r, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_n(k_z) e^{jk_z z} J_n(k_r r) dk_z$$

- 外部問題のときと同様に、 $P_n(b, k_z) = C_n(k_z) J_n(k_r b)$ となるので、

$$p(r, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_n(k_r r)}{J_n(k_r b)} P_n(b, k_z) e^{jk_z z} dk_z$$

- よって、ヘリカル波スペクトルにおける内部音場の場合の音場外挿は、

$$P_n(r, k_z) = \frac{J_n(k_r r)}{J_n(k_r b)} P_n(b, k_z)$$

円筒調和関数展開による音場の外挿

- 注意したいのは、内部音場の外挿では、分母に Bessel 関数を有すること。

$$P_n(r, k_z) = \frac{J_n(k_r r)}{J_n(k_r b)} P_n(b, k_z)$$

- Bessel 関数は多数の零点を持つような実数関数であるため、 $J_n(kb) = 0$ となる波数 k においては、上式が無限大に発散し、計算できないことになる。
- これは内部問題において、境界面状の音圧値のみから内部を計算することができない、**禁止周波数の問題**に対応する。

2次元音場の表現 🤔

- 3次元音場を考えるのが複雑あるいは計算コストが高い場合に、一旦2次元音場を考える場合がある。
- 円筒座標系での音場の表現は2次元音場に関する表現にもよく用いられ、 $z = 0$ の平面における極座標系となる。
- 2次元音場は、3次元音場が高さ方向 (z 方向) に不変とした場合に相当するため、円筒波動関数展開表現において $k_z = 0$ とした場合に対応。
 - 内部問題の一般解

$$p(r, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n J_n(kr) e^{jn\phi}$$

- 外部問題の一般解

$$p(r, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(kr) e^{jn\phi}$$

2次元音場の表現 🤔

- 2次元音場の積分表現では、2次元自由空間 Green 関数を用いる。
- 2次元自由空間 Green 関数 G_{2D} は、 z 軸に平行な線音源として、音源分布 $\delta(x - x'')\delta(y - y'')$ と 3次元自由空間 Green 関数 G との畳み込みによって以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 G_{2D}(x, y | x'', y'') &= \int_{\Omega} \delta(x' - x'')\delta(y' - y'')G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jk\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2+\zeta^2}}}{4\pi\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2+\zeta^2}}d\zeta
 \end{aligned}$$

ただし、 $\zeta = z - z'$ と置いた。

2次元音場の表現 🤔

- ここで、第1種 Hankel 関数の積分表示を用いる。

$$H_0^{(1)}(k\xi) = -\frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jk\sqrt{\xi^2+t^2}}}{\sqrt{\xi^2+t^2}} dt$$

すると、 G_{2D} は、

$$G_{2D}(x, y|x'', y'') = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-x'')^2 + (y-y'')^2})$$

- 2次元音場の積分表現は、3次元自由空間 Green 関数を G_{2D} に置き換えて、積分を1次元除くことで得られる。

参考文献



E. G. Williams (1999)

Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography
[Academic Presss, Cambridge.](#)



D. Colton and R. Kress (2013)

Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory
[Springer, New York.](#)



N. Ueno, S. Koyama, and H. Saruwatari (2021)

Directionally weighted wave field estimation exploiting prior information on source directions
[IEEE Trans. Signal Process.](#), vol. 69.



E. Wolf and J. R. Shewell (1967)

The inverse wave propagator
[Phys. Lett. A](#), vol. 25, no. 25.