

応用音響学 第8回

音響管・自由空間中の音波

小山 翔一

東京大学 大学院情報理工学系研究科 システム情報学専攻

2021/6/4

講義スケジュール

■ S セメスター 金曜 2 限 (10:25-12:10) @オンライン

■ 日程

4/9	第 1 回	} 猿渡先生	5/21	第 7 回	} 小山
4/16	第 2 回		5/28	休講	
4/23	第 3 回		6/4	第 8 回	
4/30	第 4 回		6/11	第 9 回	
5/7	第 5 回		6/18	第 10 回	
5/14	第 6 回		6/25	休講	
			7/2	第 11 回	
			7/9	第 12 回	

講義目的

■ 講義前半（猿渡先生担当）

- 音声分析，音声符号化，音声認識，音声合成，音響信号処理などに関連する基礎知識について講義する。応用として，携帯電話やMP3などの音声音楽情報圧縮技術や音声認識技術・音声合成システムなどがある。統計的信号処理の基礎，スペクトル解析，パターン認識，確率モデル，統計学習，最適解探索などの基本概念とアルゴリズムを理解し，これらの技術の基礎になる知識と概念の習得を目指す。

■ 講義後半（小山担当）

- 音響現象の数理的なモデリング方法を理解することを目的とし，音波の伝播，反射，回折，散乱などの現象を数学的に記述するための基礎事項について講義する。応用として，音源位置の推定や音場の可視化，音のVR/ARや騒音・振動制御，音響数値シミュレーションなどがある。これらの基本概念を理解することで，様々な波動場の計測・制御技術の基礎となる知識の習得を目指す。

講義後半の概要

■ 講義内容（予定）

- 5/21: 音波の伝播
- 6/4: 音響管・自由空間中の音波
- 6/11: 音場の境界値積分表現
- 6/18: フーリエ音響学 (1)
- 7/2: フーリエ音響学 (2)
- 7/9: 室内音響学と音響数値シミュレーション

■ 参考文献

- 安田仁彦, "機械音響学," コロナ社, 2004.
- E. G. Williams, "*Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*," Academic Press, 1999.

講義資料と成績評価

■ 講義資料

- ITC-LMS に前日までにアップロード予定
- <http://www.sh01.org/ja/teaching/>
あるいはシステム1研のウェブサイトからもたどれます

■ 成績評価

- レポート or オンライン試験 (7/30)

本日の目次

① 音響管・自由空間中の音波

音響管

ホーン

音響系と電気回路のアナロジ

自由空間中の音波

本日の目次

① 音響管・自由空間中の音波

音響管

ホーン

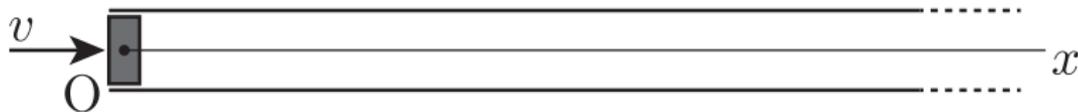
音響系と電気回路のアナロジ

自由空間中の音波

音響管

- 音波の波長に比べて十分細い断面を持つ管路，音響管の中を伝播する音波を考える。
- 管軸方向のみに伝播すると近似できるため，1次元波動方程式に従うと仮定できる。
- 時刻 t ，位置 x における速度ポテンシャル φ が従う波動方程式は，

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t^2}$$



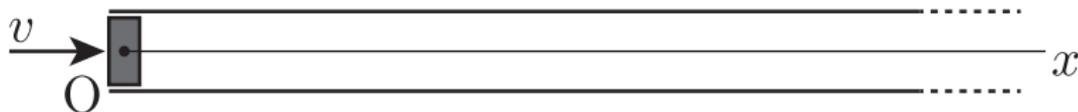
音響管

- 媒質の密度を ρ とすれば、音圧 p 、粒子速度 v は、

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

- 管路の一方の端 $x = 0$ に速度 $v = v_0 e^{-j\omega t}$ で調和振動する振動板が取り付けられているとする。
- 求めるポテンシャル φ を $\varphi = \Phi e^{-j\omega t}$ とすれば、

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + k^2 \Phi = 0$$



音響管

- この式の一般解は、

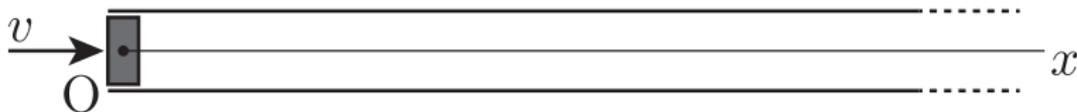
$$\Phi = Ae^{jkx} + Be^{-jkx}$$

となるので、

$$\varphi = Ae^{j(kx-\omega t)} + Be^{-j(kx+\omega t)}$$

$$p = j\rho\omega \left[Ae^{j(kx-\omega t)} + Be^{-j(kx+\omega t)} \right]$$

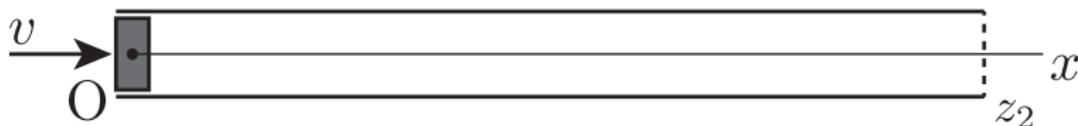
$$v = jk \left[Ae^{j(kx-\omega t)} - Be^{-j(kx+\omega t)} \right]$$



音響管

- 音響管の長さが l で、右端で音響インピーダンス密度 z_2 となる場合を考える。
- 境界条件は、 $x = 0$ において $v = v_0 e^{-j\omega t}$ 、 $x = l$ において $p/v = z_2$ となる。
- 一般解に境界条件を代入すれば、

$$jk(A - B) = v_0, \quad \frac{\omega\rho}{k} \frac{Ae^{jkl} + Be^{-jkl}}{Ae^{jkl} - Be^{-jkl}} = z_2$$



音響管

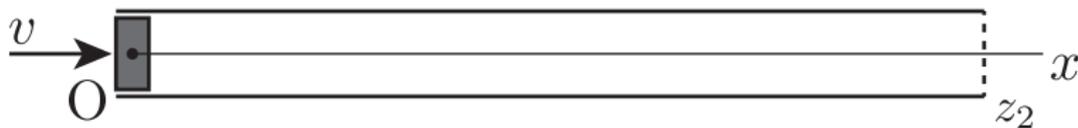
- これを解くと,

$$A = \frac{v_0}{jk} \frac{(\rho c + z_2)e^{-jkl}}{(\rho c - z_2)e^{jkl} + (\rho c + z_2)e^{-jkl}}$$

$$B = -\frac{v_0}{jk} \frac{(\rho c - z_2)e^{jkl}}{(\rho c - z_2)e^{jkl} + (\rho c + z_2)e^{-jkl}}$$

- 速度ポテンシャル φ は,

$$\varphi = \frac{z_2 \cos k(l-x) - j\rho c \sin k(l-x)}{\rho c \cos kl - jz_2 \sin kl} \frac{v_0}{jk} e^{-j\omega t}$$



音響管

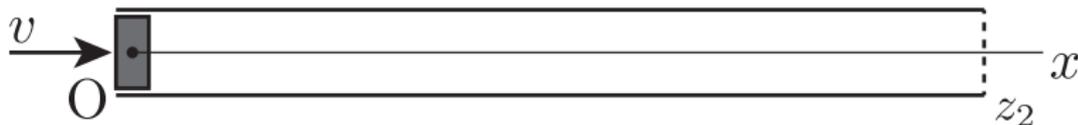
- 音圧 p と粒子速度 v は,

$$p = -\rho c \frac{z_2 \cos k(l-x) + j\rho c \sin k(l-x)}{\rho c \cos kl - jz_2 \sin kl} v_0 e^{-j\omega t}$$

$$v = \frac{\rho c \cos k(l-x) - jz_2 \sin k(l-x)}{\rho c \cos kl - jz_2 \sin kl} v_0 e^{-j\omega t}$$

- $x = 0$ の点での音響インピーダンス密度 z_0 は,

$$z_0 = \left. \frac{p}{v} \right|_{x=0} = -\rho c \frac{z_2 \cos kl - j\rho c \sin kl}{\rho c \cos kl - jz_2 \sin kl}$$



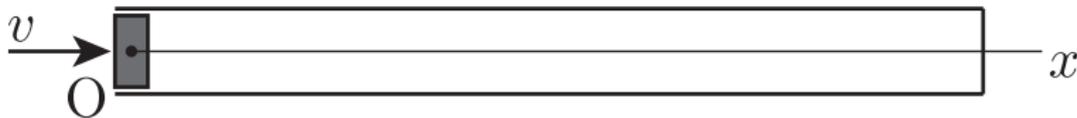
音響管：閉口管路の場合

- 管の右側で粒子速度が $v = 0$ となることから、 $x = l$ での音響インピーダンス密度が $z_2 = \infty$ になると考えればよい。
- よって、音圧 p 、粒子速度 v 、 $x = 0$ での音響インピーダンス密度 z_0 は、

$$p = -j\rho c \frac{\cos k(l-x)}{\sin kl} v_0 e^{-j\omega t}$$

$$v = \frac{\sin k(l-x)}{\sin kl} v_0 e^{-j\omega t}$$

$$z_0 = -j\rho c \frac{\cos kl}{\sin kl} = -j\rho c \cot kl$$



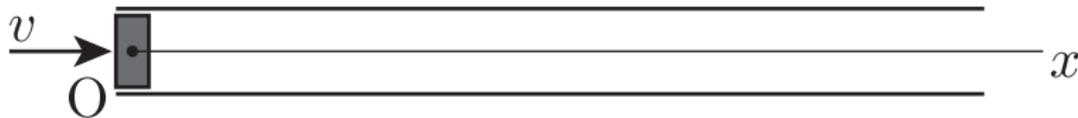
音響管：開口管路の場合

- 管の右側で圧力変動が吸収され、音圧が急激に減衰し $p = 0$ となることから、 $x = l$ での音響インピーダンス密度が $z_2 = 0$ になると考えれば良い。
- よって、音圧 p 、粒子速度 v 、 $x = 0$ での音響インピーダンス密度 z_0 は、

$$p = -j\rho c \frac{\sin k(l-x)}{\cos kl} v_0 e^{-j\omega t}$$

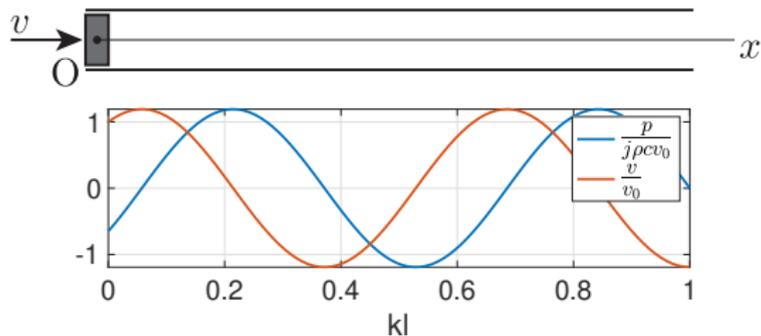
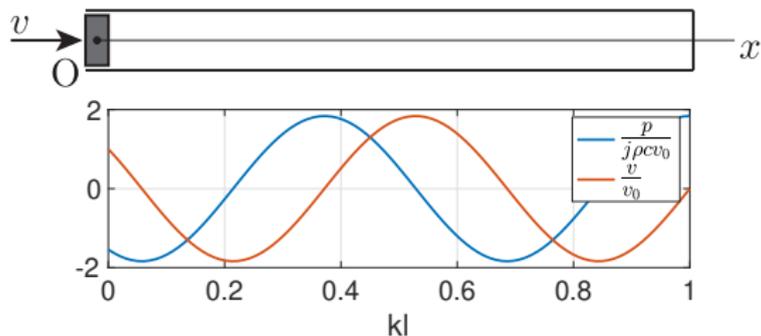
$$v = \frac{\cos k(l-x)}{\cos kl} v_0 e^{-j\omega t}$$

$$z_0 = j\rho c \frac{\sin kl}{\cos kl} = j\rho c \tan kl$$



音響管

- 音圧、粒子速度の分布が一定の値を振幅として変化する。(定在波)



音響管

- 定在波において、振幅が0となる位置を**節**，最大となる位置を**腹**と呼ぶ。
- 例えば閉口管路の場合， $n = 1, 2, \dots$ として $kl = n\pi$ のときに p と v が発散することがわかる。この状態を**共振**と呼び，このときの周波数 $\omega_n = nc\pi/l$ を**共振角周波数**と呼ぶ。
- cf. クントの実験 (Kundt's tube)

本日の目次

① 音響管・自由空間中の音波

音響管

ホーン

音響系と電気回路のアナロジ

自由空間中の音波

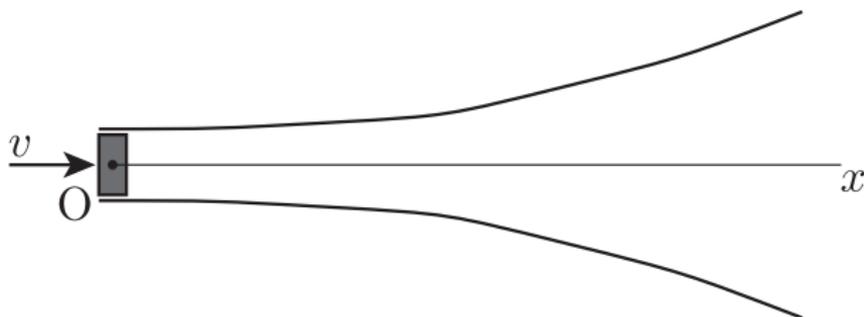
ホーン



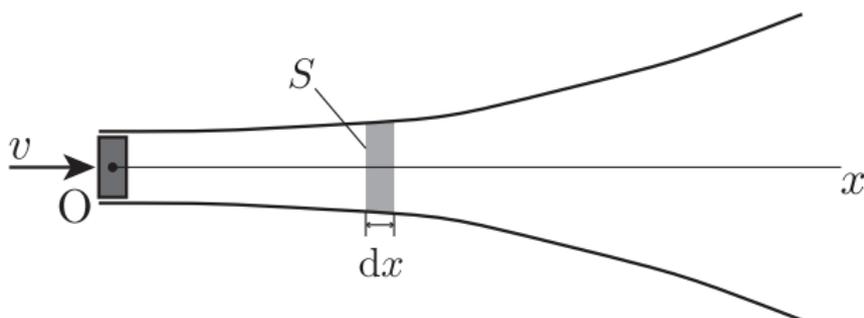
Figure: <https://en.wikipedia.org/wiki/Alphorn> より

ホーン

- 断面がゆるやかに変化する音響管を**ホーン**という。ホーンの狭い方の端を**のど**と呼び、広い方の端を**口**と呼ぶ。
- のどを原点として x 軸を定め、位置 x における断面積を S とし、管の軸方向に平面波が伝播すると仮定する。



ホーン



- このときの運動方程式は、

$$\rho S dx \frac{\partial v}{\partial t} = Sp - \left(Sp + \frac{\partial Sp}{\partial x} dx \right)$$

$$\Rightarrow \rho S \frac{\partial v}{\partial t} = -S \frac{\partial p}{\partial x} - p \frac{\partial S}{\partial x} \approx -S \frac{\partial p}{\partial x}$$

ここで、 S がゆるやかに変化するとして $\partial S / \partial x \approx 0$ と近似した。

ホーン

- 粒子の変位を u として, dx の微小要素に関する体積増加率は,

$$\frac{\partial S u}{\partial x} dx / S dx = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{S} \frac{dS}{dx}$$

- 体積弾性率を K として, 位置 x での音圧 p と粒子速度 $v = \partial u / \partial t$ との関係 (連続の式) は,

$$\begin{aligned} -p &= K \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{S} \frac{dS}{dx} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} &= -K \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{S} \frac{dS}{dx} \right) = -K \left(\frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{d \log S}{dx} \right) \end{aligned}$$

ホーン

- 速度ポテンシャル φ を用いて表すと,

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

を連続の式に代入して,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{d \log S}{dx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

- のどの部分の振動板が $v = v_0 e^{-j\omega t}$ で振動するとして, $\varphi = \Phi e^{-j\omega t}$ とすると,

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \frac{d \log S}{dx} \frac{d\Phi}{dx} + k^2 \Phi = 0$$

ホーン

- 具体的なホーンの形状としては、例えば以下が知られている。

- エクスポネンシャルホーン：

$$S = S_0(\cosh 2mx + \sinh 2mx) = S_0 e^{2mx}$$

- コニカルホーン：

$$S = S_0 \frac{x}{x_0}$$

- ハイパーボリックホーン：

$$S = S_0(\cosh 2mx + T \sinh 2mx)$$

ここで、 S_0 、 m 、 x_0 、 T は形状を決める任意の定数である。

- ハイパーボリックホーンにおいて $T = 1$ のときがエクスポネンシャルホーンに対応する。

エクスポネンシャルホーン

- ここでは特性が優れており，設計がしやすいことから広く用いられている，エクスポネンシャルホーンについて考える。
- このとき速度ポテンシャルの式は以下のようなになる。

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + 2m\frac{d\Phi}{dx} + k^2\Phi = 0$$

- この式の一般解は，任意定数 A , B を用いて，

$$\Phi = Ae^{(-m+j\sqrt{k^2-m^2})x} + Be^{(-m-j\sqrt{k^2-m^2})x}$$

となり，第1項が x 軸の正の向きに，第2項が負の向きに進む音波を表す。

エクスポネンシャルホーン

- ホーンの口から反射がない（無限長もしくはは管路の口が波長より十分大きい）場合，第1項だけ考えればよい。
- $x = 0$ での境界条件より，

$$A = \frac{v_0}{-m + j\sqrt{k^2 - m^2}}$$

となることから，

$$p = \frac{j\omega\rho v_0}{-m + j\sqrt{k^2 - m^2}} e^{(-m + j\sqrt{k^2 - m^2})x - j\omega t}$$

$$v = v_0 e^{(-m + j\sqrt{k^2 - m^2})x - j\omega t}$$

- 音響インピーダンス密度 $z = p/v$ を求めると，

$$z = \frac{p}{v} = \rho c \left(\sqrt{1 - \frac{m^2}{k^2}} - j\frac{m}{k} \right)$$

エキスポネンシャルホーン

- 音響インピーダンス密度は位置 x によらず、管路内で一定の値となる。
- 音圧と粒子速度が同位相となる場合にパワーが伝えられるため、パワーが伝えられる量は z の実部によって決まり、音響インピーダンス密度 z はパワーを伝える割合を定めると考えられる。
- $k < m$ になると、 z は純虚数となり、パワーは伝えられなくなる。この臨界点 $k = m$ となる周波数 f_c を遮断周波数と呼ぶ。

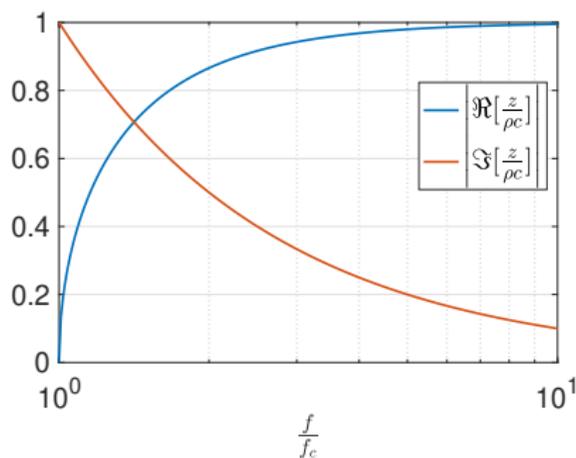
$$f_c = \frac{mc}{2\pi}$$

- z を f_c を使って書きかえると、

$$z = \rho c \left(\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}} - j \frac{f_c}{f} \right)$$

エクスポネンシャルホーン

- 音響インピーダンス密度 z と周波数 f との関係。
- z の実部は $f > f_c$ で 0 から急激に増加し、大気の音響インピーダンス密度 ρc に近づくため、エクスポネンシャルホーンは高い周波数帯域において振動体と大気とのインピーダンス整合器となる。



本日の目次

① 音響管・自由空間中の音波

音響管

ホーン

音響系と電気回路のアナロジ

自由空間中の音波

音響素子

- 音響管の長さ l が波長に比べて小さい場合 ($kl \ll 1$)，駆動点での音響インピーダンスは，

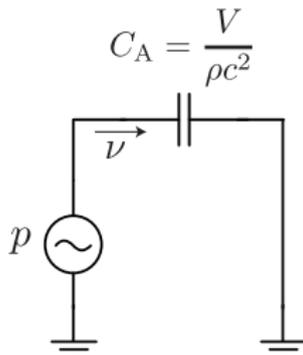
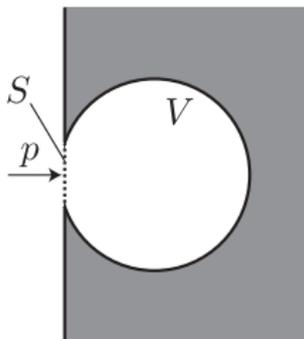
$$\text{(閉管)} \quad z_0 = -j\rho c \frac{1}{kl} = \frac{1}{j\omega \frac{l}{\rho c^2}}$$

$$\text{(開管)} \quad z_0 = j\rho ckl = j\omega \rho l$$

これらはそれぞれ電気回路でのコイル，コンデンサに相当する。

- このような音響素子を組み合わせた音響回路は，その基礎方程式が同じになるため，(集中定数系の) 電気回路と同じ方法で解析できる。
- 音響素子の例として，音響コンプライアンス，音響イナータンス，音響抵抗を導入する。

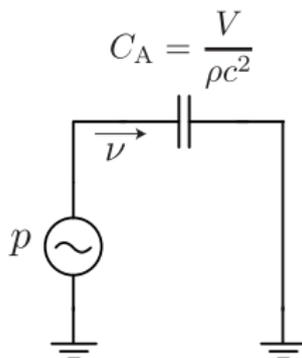
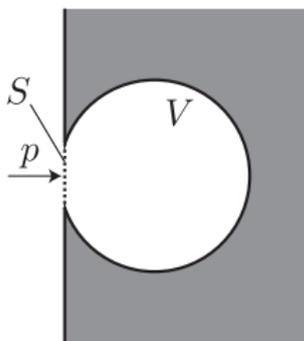
音響コンプライアンス



- 体積 V の空洞に断面積 S の小窓をあけ、その場所の音圧を p 、粒子速度を v とする。
- 体積速度（注目する面を通して出入りする媒質の体積の変化割合） $\nu = Sv$ を用いると、体積増加率は ΔV は、

$$\Delta V = \frac{Su}{V} = \frac{S}{V} \int v dt = \frac{1}{V} \int \nu dt$$

音響コンプライアンス



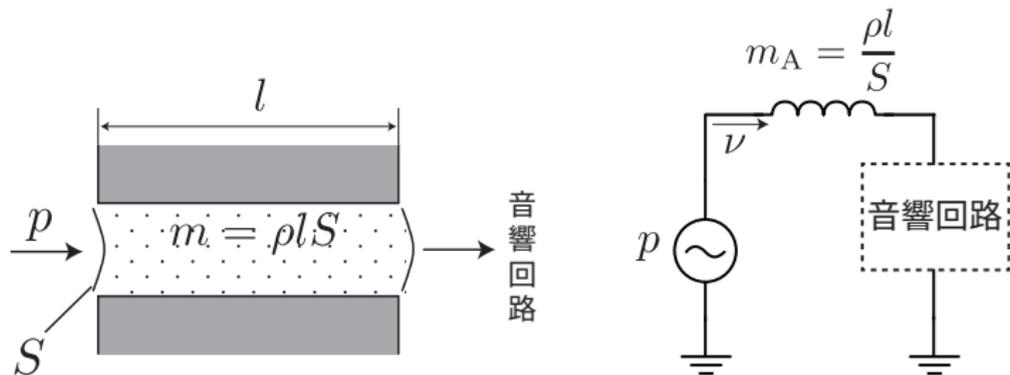
- 音圧 p は比例定数を体積弾性率 K として ΔV に比例するので、

$$p = \frac{K}{V} \int \nu dt = \frac{1}{C_A} \int \nu dt$$

ここで、 $C_A = V/K = V/\rho c^2$ とおいた。

- これは電気回路においてキャパシタンスに相当。 C_A を音響コンプライアンスと呼ぶ。

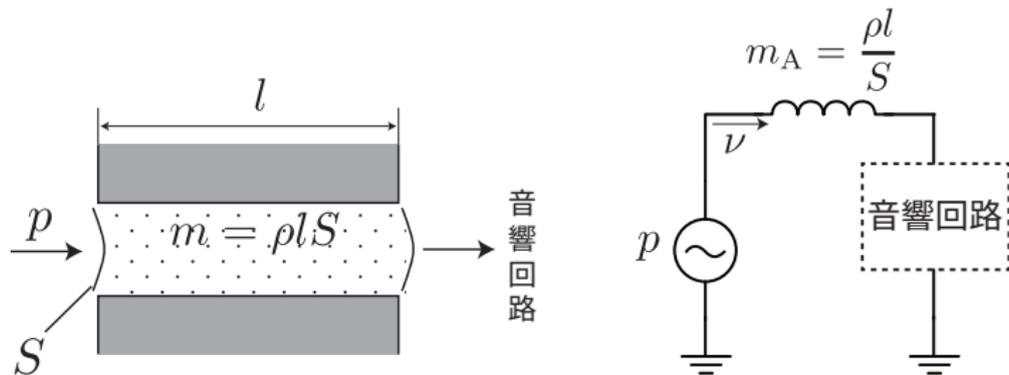
音響イナータンス



- 剛壁に囲まれた波長に比べて十分短い長さの管。断面積を S 、長さを l とする。
- 管内の気体の質量は $m = \rho l S$ となるので、片側に音圧 p が加わる場合の運動方程式は、

$$pS = \rho l S \frac{dv}{dt}$$

音響イナータンス



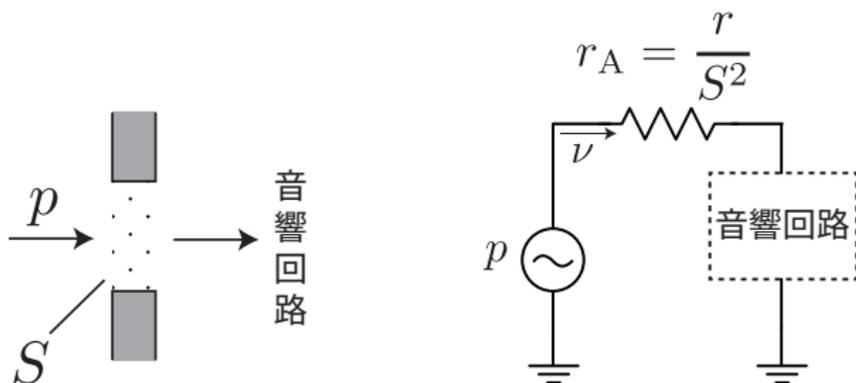
- 体積速度 $\nu = Sv$ を用いて表すと、

$$p = m_A \frac{d\nu}{dt}$$

ここで、 $m_A = \rho l / S$ とおいた。

- これは電気回路においてインダクタンスに相当。 m_A を音響イナータンスと呼ぶ。

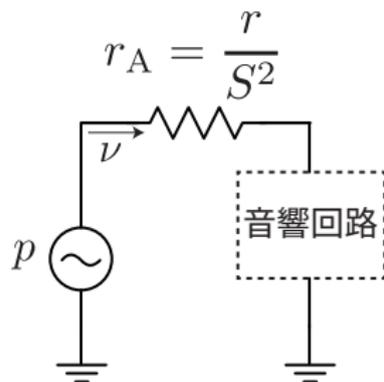
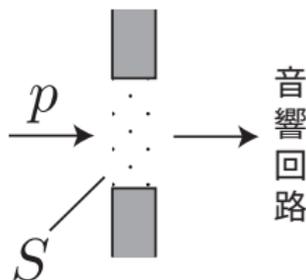
音響抵抗



- 管内に媒質の動きを妨げる物質を入れる。すると、粒子速度に比例する抵抗力が生じる。(比例定数を r とする。)
- 音圧による力 pS と、抵抗力 rv が釣り合うことから、

$$pS = rv$$

音響抵抗



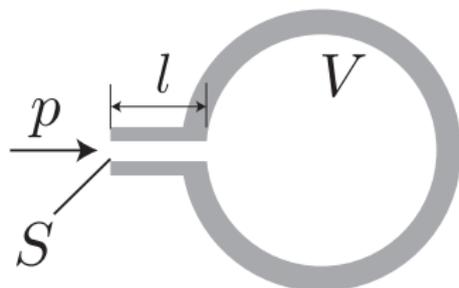
- 体積速度 $\nu = Sv$ を用いれば,

$$p = r_A \nu$$

ここで, $r_A = r/S^2$ とおいた。

- これは電気回路における抵抗に相当。 r_A を **音響抵抗** と呼ぶ。

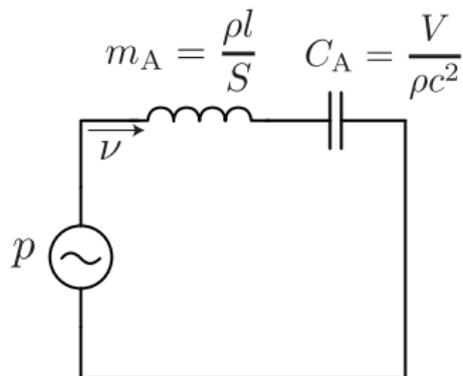
Helmholtz 共鳴器



- 波長に比べて小さい空洞 V に、断面積 S 、長さ l の短管が接続された、Helmholtz 共鳴器を音響回路として扱う。
- 短管の入り口の音圧を p 、体積速度を ν とすれば、 $m_A = \rho l/S$ の音響イナータンスと $C_A = V/\rho c^2$ の音響コンプライアンスによって生じる圧力が音圧と平衡するので、

$$p = m_A \frac{d\nu}{dt} + \frac{1}{C_A} \int \nu dt$$

Helmholtz 共鳴器

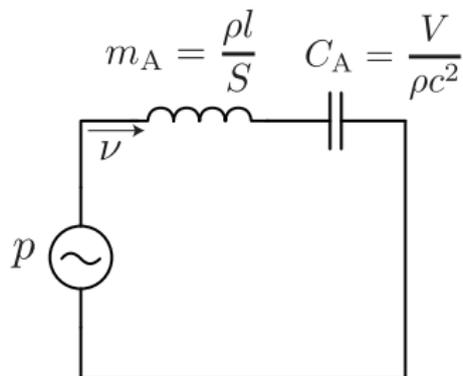


- $p = p_0 e^{-j\omega t}$, $\nu = \nu_0 e^{-j\omega t}$ を代入すると,

$$p_0 = - \left(j\omega m_A + \frac{1}{j\omega C_A} \right) \nu_0$$

- これは電気回路の LC 共振回路に相当。音圧 p_0 と体積速度 ν_0 の比を音響インピーダンス Z と呼ぶ。

Helmholtz 共鳴器



- 共振周波数 f_0 は粒子変動が最大になる $Z = 0$ となる周波数なので、

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{m_A C_A}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{lV}}$$

- ペットボトルの口に息を吹き込んだときに生じる音の周波数。

Helmholtz 共鳴器

■ パッシブ消音への Helmholtz 共鳴器の応用例 (<https://xtech.nikkei.com/dm/article/MAG/20140313/339869/>)

ヘルムホルツ共鳴で運転音を75%削減 ダイソンが新型ファンなし扇風機を発売

高田 重一 日経ものづくり

2014.04.02



PR

不正使用を防止し組込みシステム向けNFCリーダーライタIC リスタを駆逐する最適な設計、総システムコストの削減。迅速な商品化の実現。

英Dyson社の日本法人ダイソン（本社東京）は、ヘルムホルツ共鳴を活用して大幅に静音化したファンなしタイプの扇風機「dyson cool」の新製品を開発した（図1）。床に置くタイプの「同 AM07」と卓上に置く「同 AM06」の2機種を2014年4月30日に発売する。同社従来機種と比べて運転音をエネルギー換算で最大75%削減したことが特徴だ。

ダイソンはこれまで、独特な送風メカニズムを採用したファンなし扇風機を展開してきた。基本性能の充実に加え、ファンがないため安全で掃除などの手入れが楽なことや、そのユニークなデザインが評価されて大ヒットを続けている。一方で、「運転音が大嫌い」（同社）との不満の声が寄せられていたという。



図1●静音化した新型のファンなし扇風機

床に置く「同 AM07」（左）と卓上に置く「同 AM06」の2機種を発売。想定消費電力は前者が574800円（税別）、後者が4万8000円（税別）。運転音をエネルギー換算で最大75%下げた。

■ 動画：<https://youtu.be/X2IuzIEJmfm>

音響・電気・機械系のアナロジ

- 音響系は電気，機械の振動系と以下のように対応する。
- 複雑な音響回路を機械振動や等価回路として置き換える（あるいはその逆を考える）と理解しやすい場合がある。

音響系	電気系	機械系
音圧 p (Pa) 体積速度 ν (m^3/s)	電圧 e (V) 電流 i (A)	力 f (N) 速度 v (m/s)
イナータンス m (kg/m^4) 音響コンプライアンス C_A (m^3/Pa) 音響抵抗 r_A ($\text{Pa}/\text{m}^3/\text{s}$)	インダクタンス L (H) キャパシタンス C (F) 抵抗 R (Ω)	質量 m (kg) バネ定数の逆数 $1/s$ (N/m) ⁻¹ 機械抵抗 r ($\text{N}/\text{m}/\text{s}$)

音響・電気・機械系のアナロジ 🤔

- ヒトの蝸牛基底膜を模倣した“Fishbone”音響センサ
- 流体-機械系である蝸牛基底膜と等価な電気回路を機械系に相似変換したものであり、音響信号を機械的に周波数分解する MEMS センサ

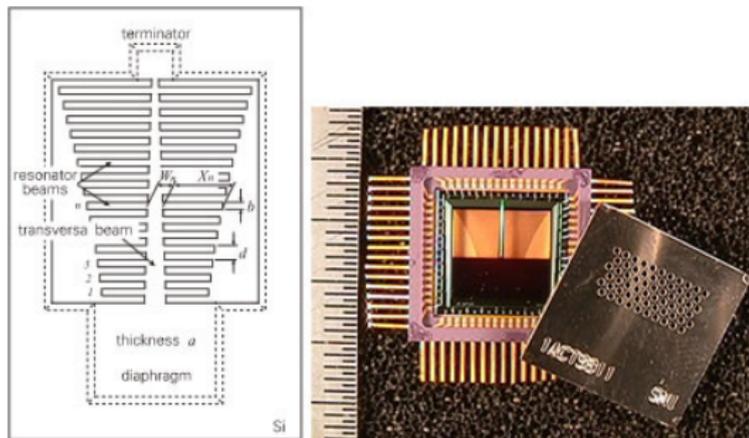


Figure: https://www.shinkawa.co.jp/magazine/vol.15_column_prof.as.html より

本日の目次

① 音響管・自由空間中の音波

音響管

ホーン

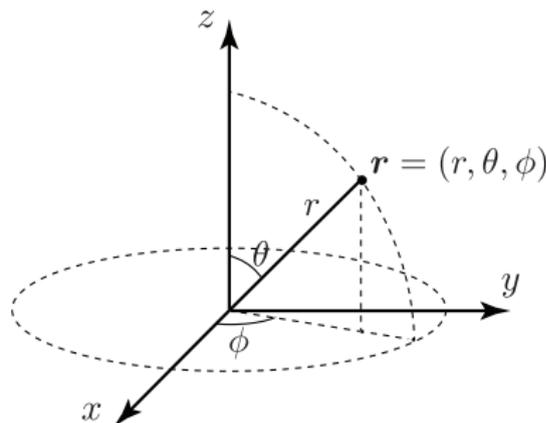
音響系と電気回路のアナロジ

自由空間中の音波

球面波

- 一様な媒質で満たされた反射物のない空間を自由空間と呼ぶ。
- あらゆる方向に一様に運動する球状の音源（呼吸球）から自由空間に放射される音波である，**球面波**の伝播を考える。
- まずは球面波を扱いやすい，球座標系 (r, θ, ϕ) を導入する。

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$



球面波

- 球座標系における波動方程式を考えるため、球座標系における ∇ と ∇^2 を書くと、

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^T$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

- よって速度ポテンシャル φ に関する波動方程式は、

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

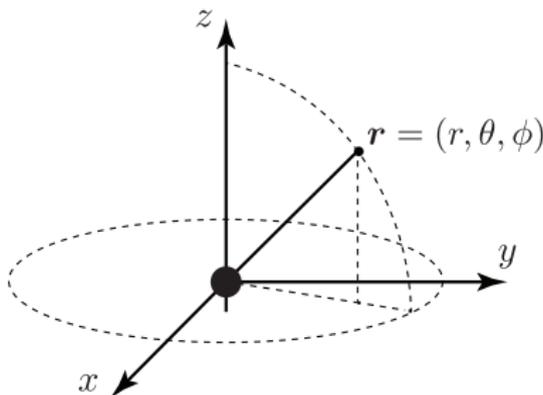
ちなみに以下の関係式を覚えておくとよい。

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi)$$

球面波

- 球状の音源の中心位置を原点 O とすれば、球面波は原点对称となるため、速度ポテンシャル φ は r と t のみに依存するため、

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$



球面波

- 速度ポテンシャル φ が従う波動方程式

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

- 先程の関係式を使って書きかえると,

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2}$$

となるので, $r\varphi$ をまとめて未知量と見なせば, 一次元波動方程式と一致する。

- 速度ポテンシャル φ と音圧 p , 粒子速度 v との関係は,

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

球面波

- 半径 a の呼吸球が速度 $v = v_0 e^{-j\omega t}$ で振動する場合を考える。
- よってこのときの境界条件は、 $r = a$ で $v = v_0 e^{-j\omega t}$ である。
- $r\varphi = \Phi e^{-j\omega t}$ とおくと、

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + k^2\Phi = 0$$

- この式の一般解は、未知定数 A , B を用いて、

$$\Phi = Ae^{jkr} + Be^{-jkr}$$

よって、

$$\varphi = \frac{A}{r} e^{j(kr - \omega t)} + \frac{B}{r} e^{-j(kr + \omega t)}$$

球面波

- 平面波の場合と同じように考えれば、先程の一般解の第1項は原点から発散する音波、第2項は原点へ収束する音波を表す。自由空間では発散する音波のみを考えればよいので、 $B = 0$ としてよい。
- $r = a$ での境界条件より、

$$\varphi = \frac{a^2}{jka - 1} \frac{1}{r} v_0 e^{j[k(r-a) - \omega t]}$$

$$p = \rho c \frac{jka}{jka - 1} \frac{a}{r} v_0 e^{j[k(r-a) - \omega t]}$$

$$v = \frac{jkr - 1}{jka - 1} \frac{a^2}{r^2} v_0 e^{j[k(r-a) - \omega t]}$$

球面波

- 放射の問題において、振動体の表面における音圧と粒子速度の比を**放射インピーダンス密度**という。
- ここでの半径 a の呼吸球の放射インピーダンス密度 z_a は、

$$z_a = \frac{p_a}{v_a} = \rho c \frac{jka}{jka - 1} v_0 e^{-j\omega t} / v_0 e^{-j\omega t} = \rho c \frac{jka}{jka - 1}$$

- また、放射の問題において、振動体の全表面が媒質から受ける力と、振動体の振動速度の比を**放射インピーダンス**という。その実部を**放射抵抗**、虚部を**放射リアクタンス**という。

点音源・モノポール

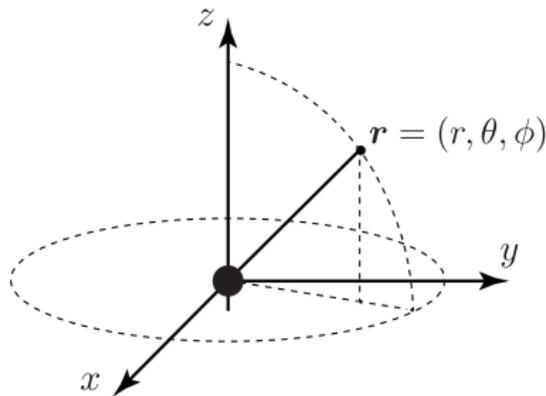
- 体積速度（粒子速度 × 面積）が調和的に変化するときの振幅に相当する量を**音源の強さ**と定義する。
- 先程の呼吸球の場合は、表面積 $4\pi a^2$ と粒子速度の振幅 v_0 を掛けて、音源の強さは $Q = 4\pi a^2 v_0$ となる。この音源の速度ポテンシャルを Q を使って表すと、

$$\varphi = \frac{1}{jka - 1} \frac{Q}{4\pi r} e^{j[k(r-a) - \omega t]}$$

点音源・モノポール

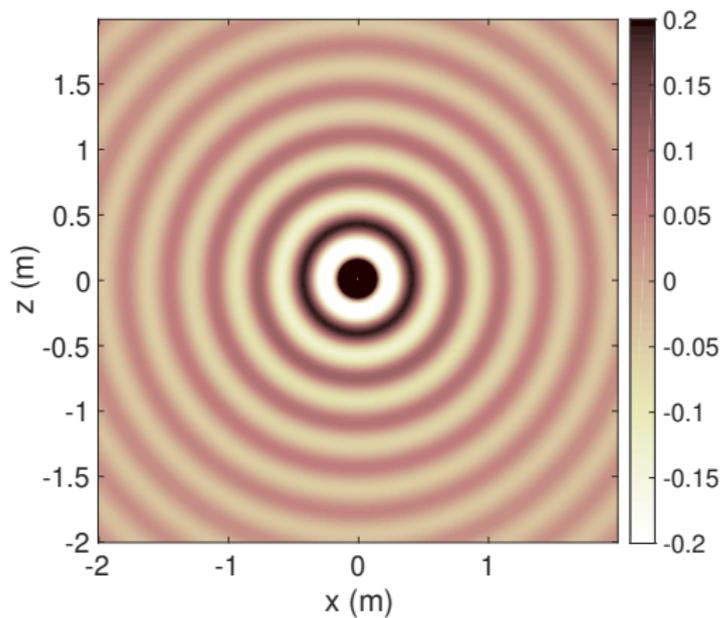
- 点音源またはモノポールは、音源の強さ Q を一定に保ったまま、半径 a を小さくしていった極限として定義される。 $a \rightarrow 0$ とすれば、

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi r} e^{j(kr - \omega t)}, \quad p = -j\omega\rho \frac{Q}{4\pi r} e^{j(kr - \omega t)}, \quad v = \frac{1 - jkr}{4\pi r^2} Q e^{j(kr - \omega t)}$$



点音源・モノポール

- 周波数 1.0 kHz のときの点音源の音圧分布 ($\rho\omega Q = 1$ の場合)



点音源・モノポール

- 点音源の時間平均音響インテンシティは、 r 方向のみに値を持ち、

$$I_r = \frac{|Q|^2}{2} \frac{\rho c k^2}{(4\pi r)^2} = \frac{|p^2|}{2\rho c}$$

- 総パワーは I_r を球面上で積分した値 $\Pi = \int I_r r^2 d\Omega$ として定義され、

$$\Pi = 4\pi r^2 I_r = \frac{\rho c k^2}{8\pi} |Q|^2$$

自由空間 Green 関数

- 自由空間 Green 関数 $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ は、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ に位置する Dirac の δ 関数による波動方程式あるいは Helmholtz 方程式の解として定義される。Helmholtz 方程式の場合、

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

ここで、 $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ は主要解

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{e^{jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}$$

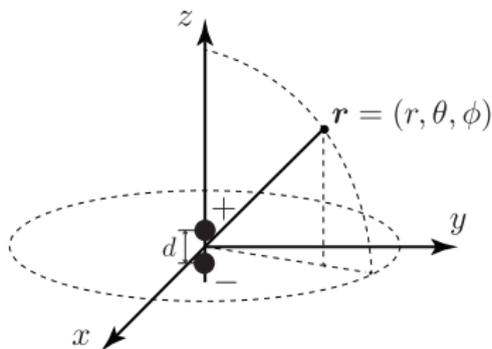
- 時間依存項を除いた点音源の音圧 $p(\mathbf{r})$ と $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ との関係は、

$$p(\mathbf{r}) = -j\rho c k Q G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$$

二重音源・ダイポール

- 二重音源またはダイポールは、2つの点音源が逆位相で無限小の距離 d だけ離れたものである。
- 二重音源のそれぞれの位置を、直交座標系でのベクトル $\mathbf{d} = (0, 0, d)^T$ を用いて $d/2$, $-d/2$ とする。位置 \mathbf{r} での速度ポテンシャルは、

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi \left\| \mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2} \right\|} e^{j(k \left\| \mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2} \right\| - \omega t)} + \frac{Q}{4\pi \left\| \mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}}{2} \right\|} e^{j(k \left\| \mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}}{2} \right\| - \omega t)}$$



二重音源・ダイポール

- 位置 $\mathbf{r}' + \boldsymbol{\epsilon}$ における自由空間 Green 関数 $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}' + \boldsymbol{\epsilon})$ の \mathbf{r}' 周りでの Taylor 展開を考えると,

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}' + \boldsymbol{\epsilon}) = \frac{e^{jk\|\mathbf{r} - (\mathbf{r}' + \boldsymbol{\epsilon})\|}}{4\pi\|\mathbf{r} - (\mathbf{r}' + \boldsymbol{\epsilon})\|}$$

$$\approx G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \frac{1}{2!} (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'})^2 G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \dots$$

ここで, $\nabla_{\mathbf{r}'} = (\partial/\partial x', \partial/\partial y', \partial/\partial z')^T$ である。

- 時間依存項を除く位置 \mathbf{r} での速度ポテンシャルを $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ を用いて書くと,

$$\varphi = -QG \left(\mathbf{r}|\mathbf{r}' + \frac{\mathbf{d}}{2} \right) + QG \left(\mathbf{r}|\mathbf{r}' - \frac{\mathbf{d}}{2} \right)$$

二重音源・ダイポール

- $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}' + \epsilon)$ の 1 次までの Taylor 展開を使って近似すると,

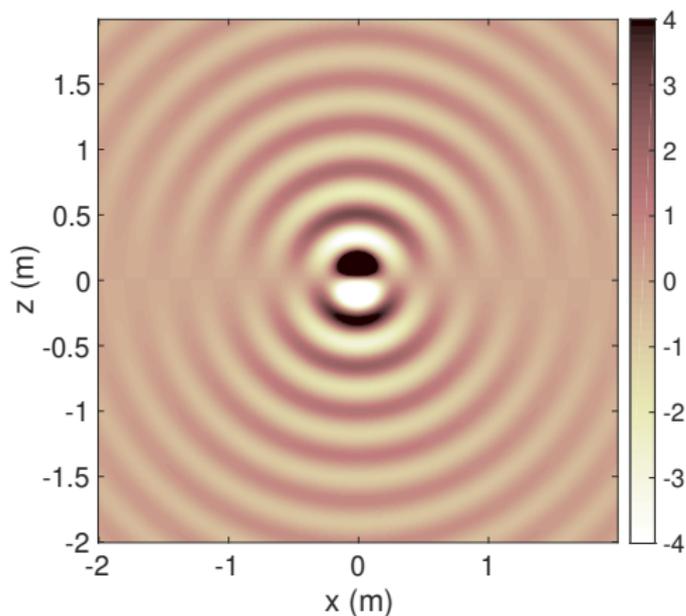
$$\begin{aligned}\varphi &\approx -Qd \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{e^{jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} \right) \Bigg|_{\mathbf{r}'=0} \cdot e^{-j\omega t} \\ &= -\frac{Qd}{4\pi r^2} (1 - jkr) \cos\theta e^{j(kr-\omega t)}\end{aligned}$$

- 音圧 p および r 方向, θ 方向の粒子速度 v_r , v_θ は, 二重音源の強さを $D = Qd$ として,

$$\begin{aligned}p &= -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\rho ck^2 D \cos\theta \left(1 + \frac{j}{kr} \right) \frac{e^{j(kr-\omega t)}}{4\pi r} \\ v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -k^2 D \cos\theta \left(1 + \frac{2j}{kr} - \frac{2}{k^2 r^2} \right) \frac{e^{j(kr-\omega t)}}{4\pi r} \\ v_\theta &= -jkD \sin\theta \left(1 + \frac{j}{kr} \right) \frac{e^{j(kr-\omega t)}}{4\pi r^2}\end{aligned}$$

二重音源・ダイポール

- 周波数 1.0 kHz のときの二重音源の音圧分布 ($\rho\omega D = 1$ の場合)



二重音源・ダイポール

- 二重音源の時間平均音響インテンシティは、 r 方向のみに値を持ち、

$$I_r = \frac{\rho c k^4 |D|^2 \cos^2 \theta}{2(4\pi r)^2}$$

- 総パワーは I_r を球面上で積分した値なので、

$$\Pi = \frac{\rho c k^4 |D|^2}{24\pi}$$

モノポールが周波数の2乗に比例するのに対して、ダイポールの総パワーは4乗に比例する。

二重音源・ダイポール

- 位置 r が波長に比べて十分遠いとする。 $(kr \gg 1)$
- このときの速度ポテンシャルは,

$$\varphi \approx jk \frac{D}{4\pi r} \cos \theta e^{j(kr - \omega t)}$$

- 音圧 p と r 方向, θ 方向の粒子速度 v_r , v_θ は,

$$p = \rho c k^2 \frac{D}{4\pi r} \cos \theta e^{j(kr - \omega t)}$$

$$v_r = -k^2 \frac{D}{4\pi r} \cos \theta e^{j(kr - \omega t)}$$

$$v_\theta = -jk \frac{D}{4\pi r^2} \sin \theta e^{j(kr - \omega t)}$$

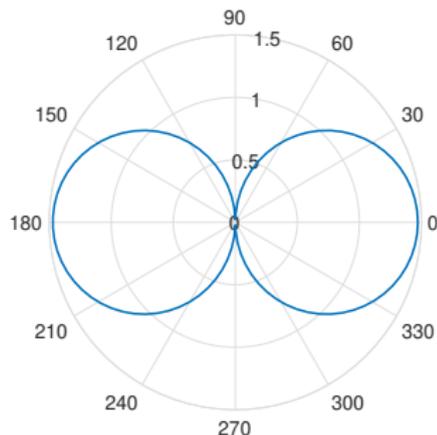
二重音源・ダイポール

- 遠距離場の指向性パターン $D(\theta, \phi)$ は、(時間依存項を除いた) 音圧や粒子速度に関して $r \rightarrow \infty$ とした上で e^{jkr}/r の項を除くことで定義される。

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p(r, \theta, \phi) = \frac{e^{jkr}}{r} D(\theta, \phi)$$

- よって、二重音源の音圧に関する指向性パターンは、

$$D(\theta, \phi) = \frac{\rho c k^2 D}{4\pi} \cos \theta$$

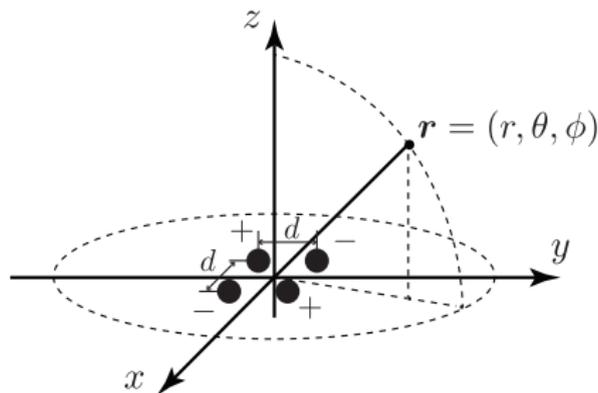


$|D(\theta, \phi)|$ のプロット

四重音源・クアドラポール

- 四重音源またはクアドラポールは、図のように近接した4つの点音源によって構成される。
- このときの音圧は、時間依存項を除いて、

$$p = -j\rho c k Q d^2 \frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} \left(\frac{e^{jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} \right) \Big|_{\mathbf{r}'=0}$$



参考文献



安田仁彦 (2004)

機械音響学

[コロナ社, Tokyo.](#)



三井田惇郎 (1987)

音響工学

[昭晃堂, Tokyo.](#)



平尾雅彦 (2013)

音と波の力学

[岩波書店, Tokyo.](#)



E. G. Williams (1999)

Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography

[Academic Press, Cambridge.](#)



P. A. Nelson and S. J. Elliott (1992)

Active Control of Sound

[Academic Press, London.](#)