

信号処理論第一：第5回

サンプリング定理・離散Fourier変換

東京大学 大学院情報理工学系研究科 システム情報学専攻

小山 翔一

講義の目的と概要

➤ 講義の目的

- 信号処理の基礎を習得する。

➤ 講義の概要

- 決定論的信号（確定的信号）に関する信号処理について、基礎事項を理解する。本講義では、できるだけ特定の応用分野に限らない、一般的な信号処理論について講義する。ただし、統計的信号処理については扱わず、信号処理論第二の範囲となる。

➤ キーワード

- Fourier級数, Fourier変換, 離散時間Fourier変換, 離散Fourier変換, FFT, 窓Fourier変換, 線形時不変システム, サンプリング定理, インパルス応答, 伝達関数, 周波数応答, 差分方程式, ブロック線図, 因果性, 安定性, FIRフィルタ, IIRフィルタ

講義スケジュール

➤ Sセメスター 金曜 1限 (8:30-10:15) @63 / zoom

➤ 日程 (暫定版)

■ 4/8	第1回	} 小山 担当	■ 6/3	第7回	} 堀崎 担当
■ 4/15	第2回		■ 6/10	第8回	
■ 4/22	第3回		■ 6/17	第9回	
■ 5/6	第4回		■ 6/24	第10回	
■ 5/13	第5回		■ 7/1	第11回	
■ 5/20	第6回		■ 7/8	第12回	
■ 5/27	第7回		■ 7/22	<u>学期末試験</u>	

【注意】

- 第1回(4/8), 第2回(4/15)はオンラインのみで実施。
- 第3回以降は対面・オンライン併用のハイブリッド形式。
- 第7回(5/27)はオンラインのみでの小テストとなる予定。
- 学期末試験の実施方法は未定。

ハイブリッド講義の実施方法

- 対面側は63講義室，オンライン側はzoom (<https://zoom.us/>) を用いて実施。
- 講義のURLは前半・後半それぞれで毎回同じにする予定。後半(6/3)からはURLが変更となるので必ずITC-LMSを確認すること。
- オンライン受講者で質問がある場合は，チャットに書き込む，あるいはミュートをオフにして音声で質問する，のいずれの方法でも良い。
- 教員の連絡先

shoichi_koyama@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

horisaki@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

➤ 講義資料・動画

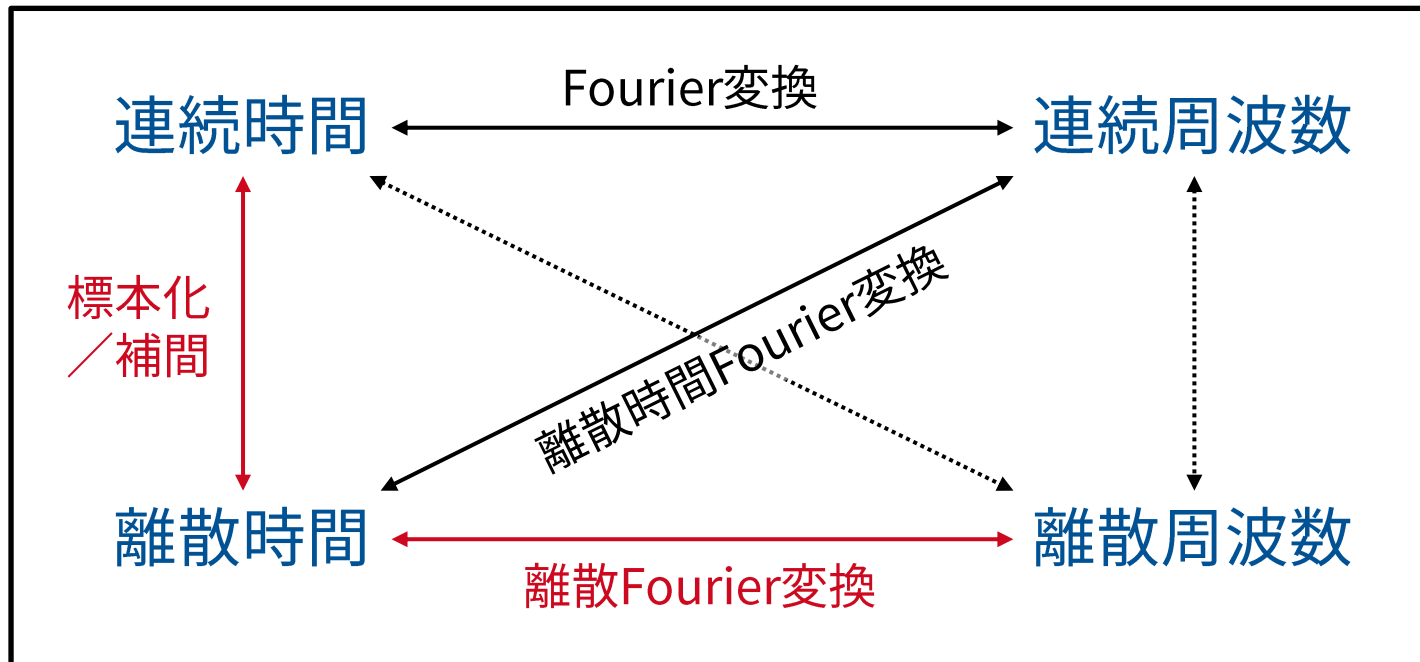
- ITC-LMSにアップロード
- 資料はできるだけ講義前日までにアップロードするようにします。

➤ 成績評価

- 学期末試験（暫定）
- 第7回（5/27）にオンラインで実施予定の小テスト

本日の目次

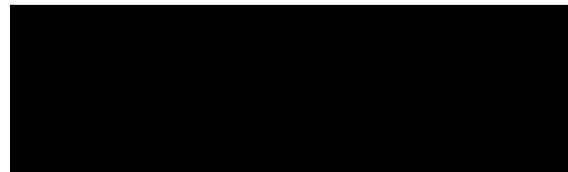
1. サンプリング定理
2. 離散Fourier変換



サンプリング定理

エイリアシング

- 蛇口から周期的に落ちる水滴にストロボを照射する。



$$T = 0.5 \text{ s}$$

エイリアシング

- 蛇口から周期的に落ちる水滴にストロボを照射する。



$$T = 1.0 \text{ s}$$

エイリアシング

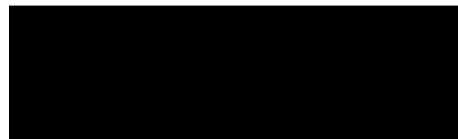
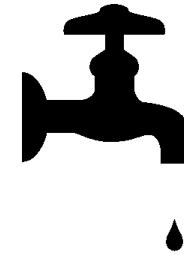
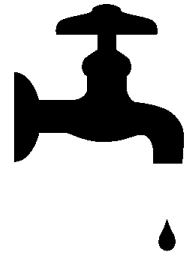
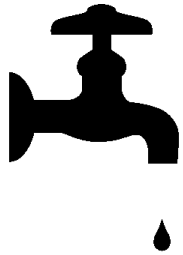
- 蛇口から周期的に落ちる水滴にストロボを照射する。



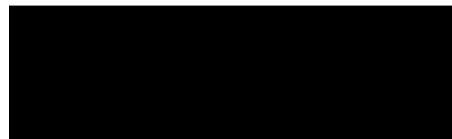
$$T = 1.5 \text{ s}$$

エイリアシング

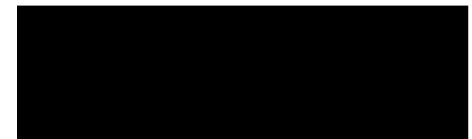
- 蛇口から周期的に落ちる水滴にストロボを照射する。



$$T = 0.5 \text{ s}$$



$$T = 1.0 \text{ s}$$



$$T = 1.5 \text{ s}$$

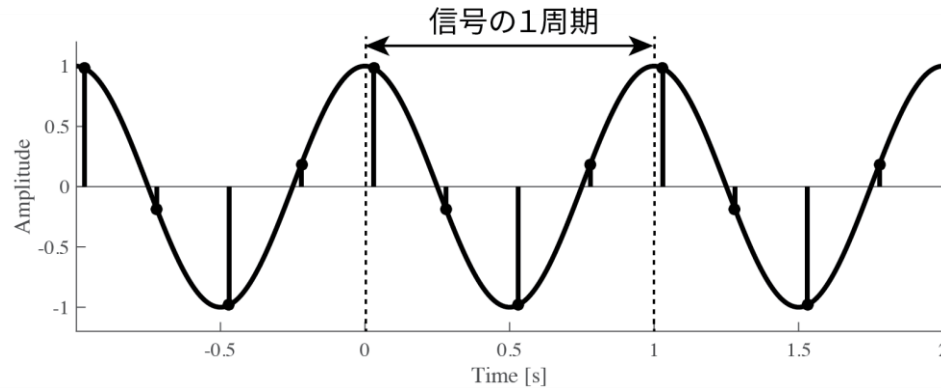
日本音響学会編, "音響学入門ペディア," コロナ社, 2017.

ストロボの照射間隔が大きいと、
水滴が動く方向を区別できなくなる

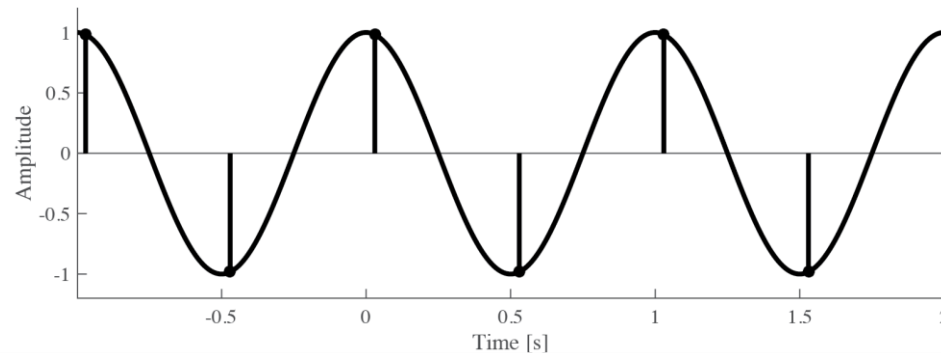
エイリアシング

➤ 周期1秒 (周波数1 Hz) の正弦波で考える。

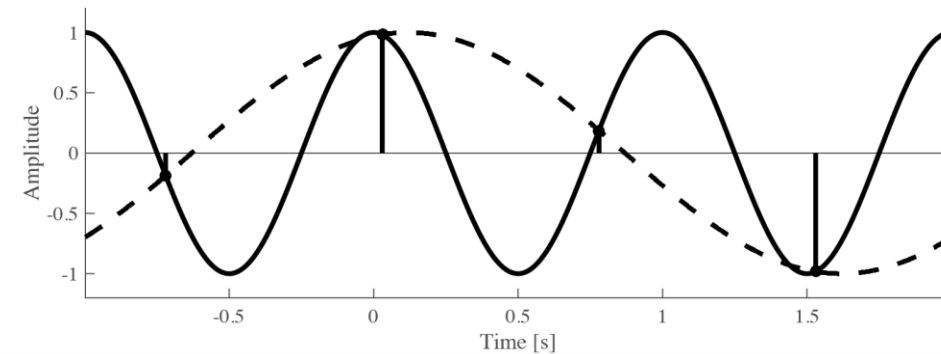
$$f_s = 4 \text{ Hz}$$



$$f_s = 2 \text{ Hz}$$



$$f_s = 4/3 \text{ Hz}$$



連続時間信号と離散時間信号の関係

- 周波数領域における連続時間信号と離散時間信号，
 $X_A(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ と $X_D(\Omega) = \text{DTFT}[x[n]]$ の関係を考える。

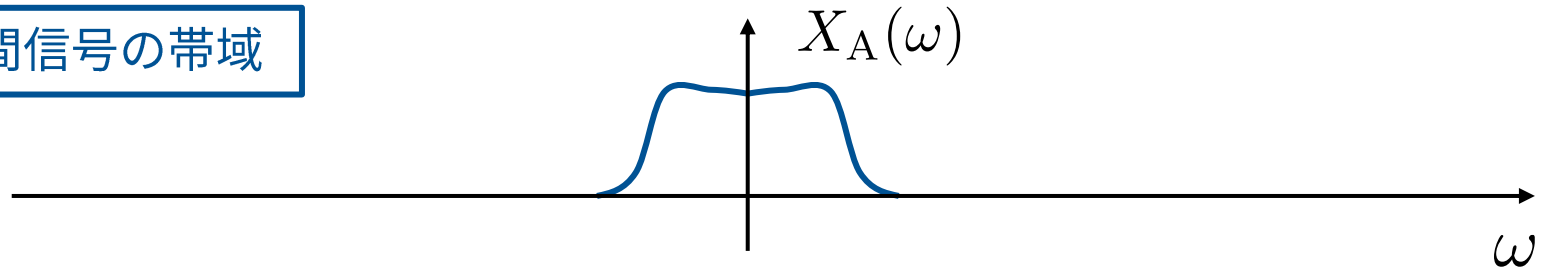
$$\begin{aligned} X_D(\omega T) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - nT) \exp(-j\omega t) dt && \boxed{x[n] = x(nT)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \exp(-j\omega t) dt && \text{畳み込みと積の関係} \\ &= \frac{1}{2\pi} X_A(\omega) * \mathcal{F} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] && \text{デルタ列のFourier変換} \\ &= \frac{1}{2\pi} X_A(\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(\omega - \frac{2\pi}{T} n \right) && \text{畳み込み演算の定義} \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X_A(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(\omega - \frac{2\pi}{T} n - \xi \right) d\xi && \text{デルタ関数の定義} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_A \left(\omega - \frac{2\pi}{T} n \right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow X_D(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_A \left(\frac{\Omega}{T} - \frac{2\pi}{T} n \right)$$

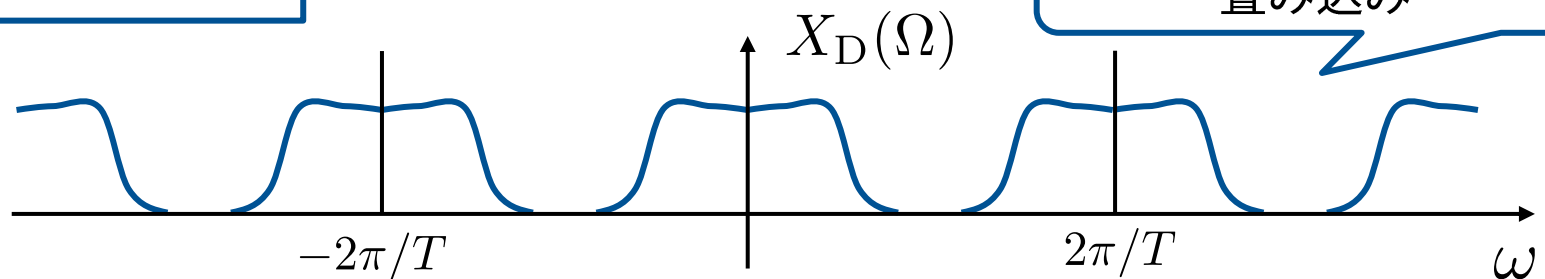
連続時間信号と離散時間信号の関係

➤ $X_D(\Omega)$ は $X_A(\omega)$ を $2\pi/T$ 間隔でシフトして加算したものの。

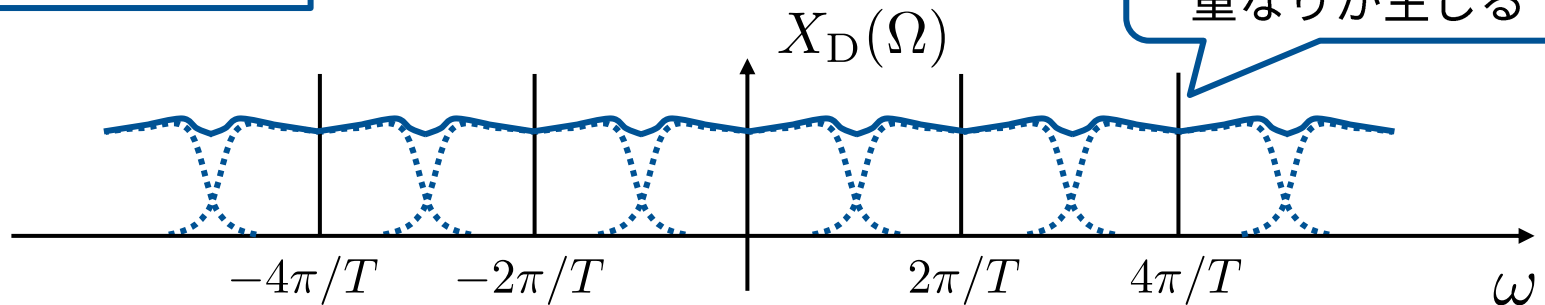
連続時間信号の帯域



T が十分小さい場合



T が大きい場合



エイリアシング

➤ エイリアシング

- $X_A(\omega)$ の帯域の上限を知らない場合、どれがくし型スペクトルの歯にあたる部分かが判別できなくなり、離散時間信号からその元となった連続時間信号が一意に定まらなくなる。

➤ エイリアシングの本当の問題

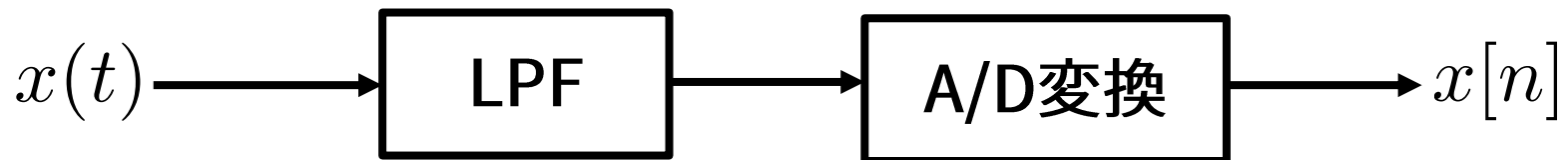
- $X_A(\omega)$ の帯域の上限を知っていても、サンプリング周期 T が大きい（サンプリング周波数 $1/T$ が低い）場合、スペクトルの重なりが生じ、元の連続時間信号のスペクトル形状が明確でなくなる。
(この重なりのことをエイリアシングと呼ぶ場合もある。)

➤ エイリアシングの回避条件

- 連続時間信号 $x(t)$ ($X_A(\omega)$) の帯域の上限が、サンプリング周波数の $1/2$ 以下に帯域制限されていなければならない。

アンチエイリアシングフィルタ

- アンチエイリアシングフィルタ
 - 連続時間信号 $x(t)$ に対し，その周波数帯域をサンプリング周波数の1/2以下に帯域制限するアナログフィルタ
- 連続時間信号は，アンチエイリアシングフィルタ（ローパスフィルタ／バンドパスフィルタ）を通過させてからサンプリングする。
 - エイリアシングの問題を起こす帯域はカットし，連続時間信号が持つその帯域の情報は捨てる。



サンプリング定理

▶ サンプリング定理

- 連続時間信号 $x(t)$ のFourier変換 $X(\omega)$ の帯域の上限が $\omega_0 = 2\pi f_0$ のとき，サンプリング周波数が $2f_0$ 以上でサンプリングした離散時間信号 $x[n]$ から連続時間信号 $x(t)$ は完全に復元できる。

- エイリアシングを起こさない条件に相当し，サンプリング周波数 f_s は以下の条件を満たす必要がある。

$$f_0 \leq \frac{f_s}{2}$$

- サンプリング周波数の1/2をNyquist周波数と呼ぶ。

サンプリング定理

- 帯域制限 ($-\pi/T < \omega < \pi/T$) されている連続時間信号 $x(t)$ と離散時間信号 $x[n]$ の時間領域での関係

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_A(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \\&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_A(\omega) \exp(j\omega t) d\omega && \text{帯域制限の条件} \\&= \frac{1}{2\pi T} \int_{-\pi}^{\pi} X_A\left(\frac{\Omega}{T}\right) \exp\left(j\frac{\Omega}{T}t\right) d\Omega && \text{変数変換 } \Omega = \omega T \\&= \frac{1}{2\pi T} \int_{-\pi}^{\pi} T X_D(\Omega) \exp\left(j\frac{\Omega}{T}t\right) d\Omega && \text{帯域制限の条件下では} \\& && X_D(\Omega) = \frac{1}{T} X_A\left(\frac{\Omega}{T}\right) \\&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-j\Omega n) \right] \exp\left(j\frac{\Omega}{T}t\right) d\Omega \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[j\Omega \left(\frac{t}{T} - n\right)\right] d\Omega \right\} \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin \pi \left(\frac{t}{T} - n\right)}{\pi \left(\frac{t}{T} - n\right)} \quad \left(= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \operatorname{sinc} \left[\pi \left(\frac{t}{T} - n\right) \right] \right)\end{aligned}$$

サンプリング定理

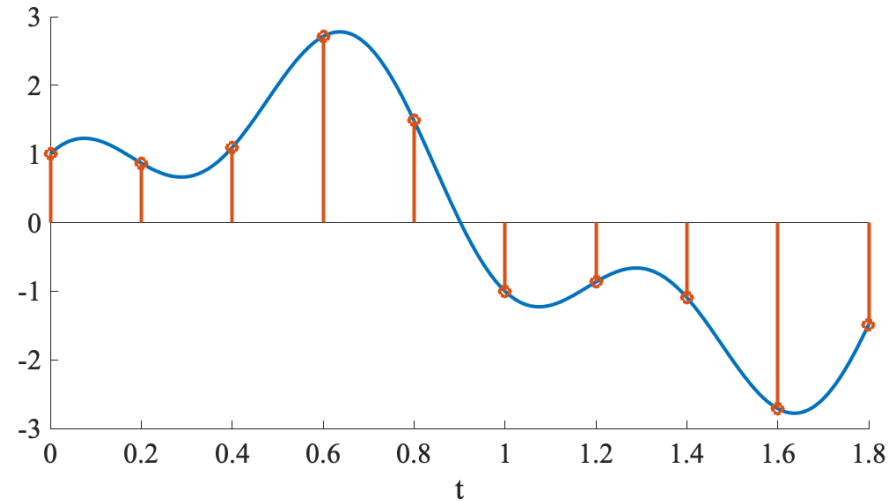
- 帯域制限された連続時間信号 $x(t)$ は、離散時間信号 $x[n]$ と sinc 関数との畳み込みによって完全に復元できる。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \operatorname{sinc} \left[\pi \left(\frac{t}{T} - n \right) \right]$$
$$= x[n] * \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi t}{T} \right) \quad \rightarrow \text{sinc補間}$$

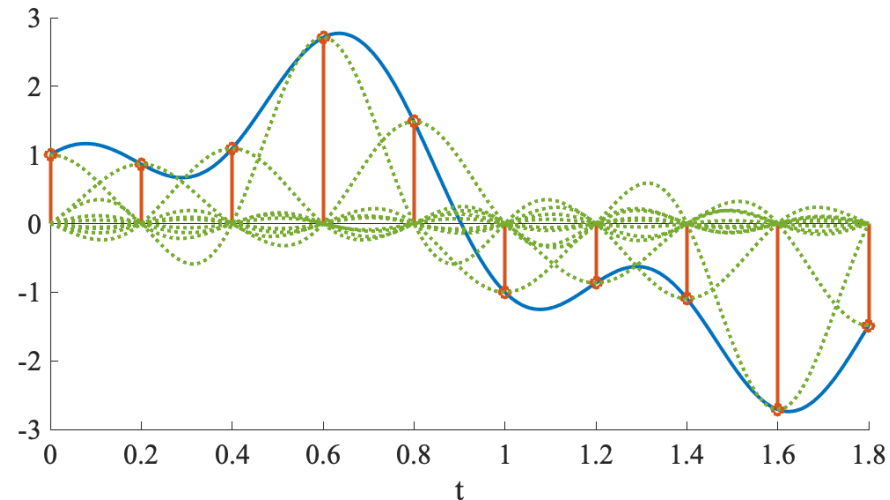
- 完全に復元するためには、離散時間信号 $x[n]$ が $n \in \mathbb{Z}$ で与えられている必要がある。
- 実際の状況では難しいが、sinc関数は中心から離れると減衰する関数であるため、ある程度の性質は再現される。

サンプリング定理

連続時間信号のサンプリング



sinc補間による連続時間信号の復元



サンプリング定理の歴史

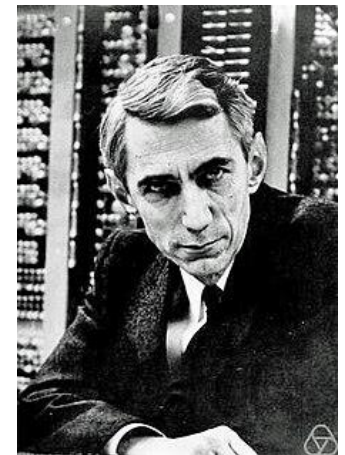


- 標本化定理は1928年にHarry Nyquistによって予想され，1949年にClaude Shannonによって証明されたため，**Nyquist—Shannonの標本化定理**と呼ばれることが多い。
- イギリスのE. T. Whittaker (1915)，ソビエト連邦のV. Kotel'nikov (1935)，ドイツのH. Raabe (1938)，日本の染谷勲(1949)らもShannonとは独立に標本化定理あるいは同様の補間公式を証明している。
- 世界で最初の標本化定理の証明は，日本の小倉金之助の論文 (1920)とされている。
 - P. L. Butzer, et al., “Interpolation and sampling: E. T. Whittaker, K. Ogura and their followers,” *J. Fourier Anal. Appl.*, 2011.



Harry Nyquist

https://en.wikipedia.org/wiki/Harry_Nyquist



Claude Shannon

https://en.wikipedia.org/wiki/Claude_Shannon



- ▶ サンプリング定理の再構成式 ($T = 1$)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \text{sinc} [\pi (t - n)]$$

- ▶ Sinc関数を基底関数とする基底展開として見れば,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(t)$$

展開係数が離散信号に対応
 $\alpha_n = x[n]$

$$\varphi_n(t) = \text{sinc} [\pi (t - n)]$$



- Sinc関数は正規直交基底であり，帯域制限信号を表す関数空間 $V(\mathbb{R})$ において完全系をなす

$$\begin{aligned}\langle \varphi_n, \varphi_i \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}[\pi(t - n)] \text{sinc}[\pi(t - i)] dt \\ &= \text{sinc}[\pi(n - i)] \\ &= \delta_{n-i}\end{aligned}$$

- サンプリングは展開係数を求める操作と等価であり，信号と基底関数との内積となる

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \langle x, \varphi_n \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \text{sinc}[\pi(t - n)] dt\end{aligned}$$

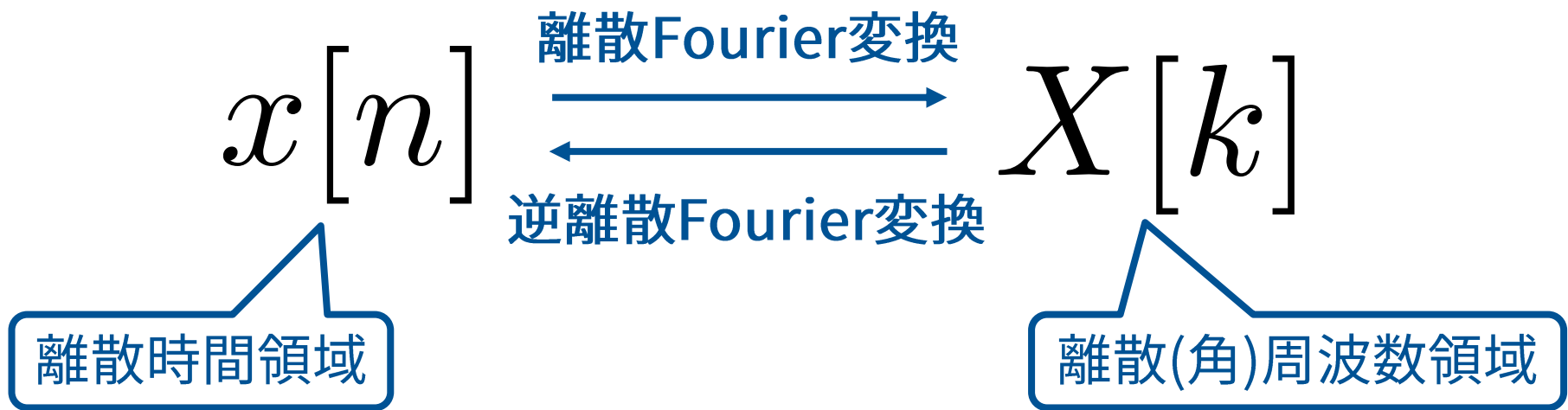
低域通過フィルタ後に標本化を行う操作に等しい

- ➔ $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ の場合は，帯域制限信号としての最小二乗近似（部分空間 $V(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ への直交射影）

離散FOURIER変換

離散Fourier変換

- 離散Fourier変換は、有限長の離散時間信号を、離散周波数複素数値列へ変換することを目的とする。



➤ 離散Fourier変換の定義

- 離散Fourier変換

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

$$k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

- 逆離散Fourier変換

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \exp\left(j\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

$$n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

離散Fourier変換

- 離散Fourier変換と逆離散Fourier変換を以下のように表記。

$$\text{DFT} [x[n]] = X[k]$$

$$\text{DFT}^{-1} [X[k]] = x[n]$$

- 離散Fourier変換対を以下のように表記。

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X[k]$$

離散Fourier変換

➤ 離散Fourier変換を内積の形で表すと,

$$X[k] = \left\langle x[n], \exp\left(j\frac{2\pi kn}{N}\right) \right\rangle$$

$\ell^2([0, N-1])$ での内積

$$x[n] = \frac{1}{N} \left\langle X[k], \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right) \right\rangle$$

$\ell^2([0, N-1])$ での内積

– 有限長の時間区間の信号から周波数成分の情報を得る。

離散時間Fourier変換との関係

- 離散Fourier変換は，離散時間Fourier変換を規格化周波数について離散化したもの。

規格化周波数の離散化： $\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k$


$$k \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$$

$$X(\Omega)|_{\Omega=\Omega_k} = X(\Omega_k)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

$$= X[k]$$

 $x[n]$ は有限長

有限の定義域としたことによる性質

- 定義域は, $n, k \in \{0, \dots, N - 1\}$
- 定義域の外での振る舞いは,

$$\begin{aligned}x[n + mN] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \exp\left(j \frac{2\pi k(n + mN)}{N}\right) \\&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \exp\left(j \frac{2\pi kn}{N}\right) \exp\left(j \frac{2\pi kmN}{N}\right) \\&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \exp\left(j \frac{2\pi kn}{N}\right) \\&= x[n]\end{aligned}$$

$\exp(j2\pi km) = 1$

$$X[k + mN] = X[k]$$

周期 N で周期的に
拡張されている

有限の定義域としたことによる性質

➤ 離散Fourier変換とFourier級数展開との関係

離散Fourier変換

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp\left(j \frac{2\pi kn}{N}\right)$$

$$c_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j \frac{2\pi kn}{N}\right)$$

Fourier級数展開

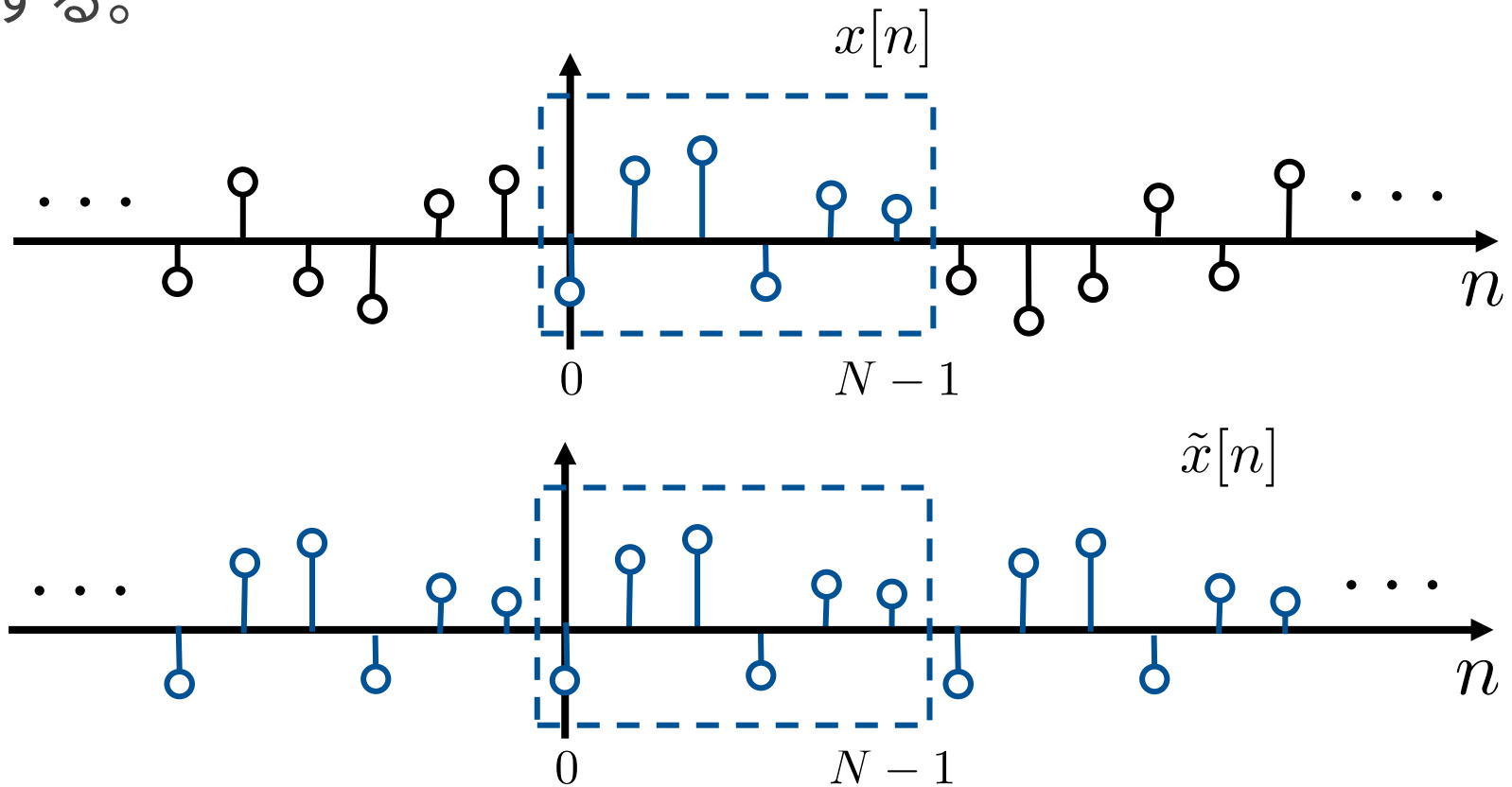
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(j \frac{2\pi kt}{T}\right)$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left(-j \frac{2\pi kt}{T}\right) dt$$

離散Fourier変換は，Fourier級数展開を時間領域で離散化したものとみなせる

離散Fourier変換の性質

- ▶ 有限長の $x[n]$ と $X[k]$ を周期的に拡張した $\tilde{x}[n]$ と $\tilde{X}[k]$ を導入する。



- $\tilde{x}[n + mN] = \tilde{x}[n]$, $\tilde{X}[k + mN] = \tilde{X}[k]$
- $\text{DFT}[\tilde{x}[n]] = \tilde{X}[k]$, $\text{DFT}^{-1}[\tilde{X}[k]] = \tilde{x}[n]$

離散Fourier変換の性質

➤ 線形性

$$\text{DFT} [\alpha x[n] + \beta y[n]] = \alpha X[k] + \beta Y[k]$$

➤ 巡回畳み込みと乗算

$$\text{DFT} [x[n] \otimes y[n]] = X[k]Y[k]$$

$$\text{DFT} [x[n]y[n]] = \frac{1}{N} X[k] \otimes Y[k]$$

N 点の巡回畳み込み

離散Fourier変換の性質

➤ 巡回時間シフト

modで表現

$$\begin{aligned}\text{DFT} [\tilde{x}[n - m]] &= \text{DFT} [x[(n - m) \bmod N]] \\ &= \exp\left(-j\frac{2\pi km}{N}\right) X[k]\end{aligned}$$

➤ 巡回周波数シフト

$$\begin{aligned}\text{DFT}^{-1} [\tilde{X}[k - l]] &= \text{DFT}^{-1} [X[(k - l) \bmod N]] \\ &= \exp\left(j\frac{2\pi ln}{N}\right) x[n]\end{aligned}$$

離散Fourier変換の性質

➤ 複素共役

$$\text{DFT} [\tilde{x}^*[n]] = \tilde{X}^*[-k]$$

$$\text{DFT}^{-1} [\tilde{X}^*[k]] = \tilde{x}^*[-n]$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{DFT} [x^*[n]] = X^*[-k \bmod N] \\ \text{DFT}^{-1} [X^*[k]] = x^*[-n \bmod N] \end{array} \right)$$

離散Fourier変換の性質

➤ Parsevalの等式（一般化Parsevalの等式）

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$
$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]y^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]Y^*[k] \right)$$

➤ 巡回相関関数

$$\text{DFT} [\tilde{r}_{xy}[m]] = X[k]Y^*[k]$$

ここで,

$$\tilde{r}_{xy}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\tilde{y}^*[n-m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]y^*[(n-m) \bmod N]$$

離散Fourier変換の性質

➤ 対称性

$x[n]$		$X[k]$	
\Re	\Im	\Re	\Im
even	0	even	0
odd	0	0	odd
0	even	0	even
0	odd	odd	0

離散Fourier変換と座標変換

- 離散時間信号をベクトルとして考える。

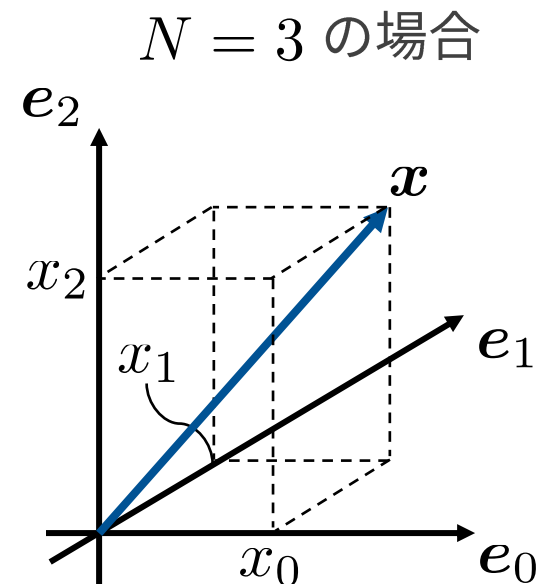
数列として表記

$$\mathbf{x} = [x[0], \dots, x[N-1]]^T = [x_0, \dots, x_{N-1}]^T$$

- N 次元の標準基底 $\{\mathbf{e}_n\}_{n=0}^{N-1}$ (正規直交基底) を考える。

$$\begin{cases} \mathbf{e}_0 = [1, 0, \dots, 0]^T \\ \mathbf{e}_1 = [0, 1, \dots, 0]^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{N-1} = [0, 0, \dots, 1]^T \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_0 = \mathbf{e}_0^H \mathbf{x} \\ x_1 = \mathbf{e}_1^H \mathbf{x} \\ \vdots \\ x_{N-1} = \mathbf{e}_{N-1}^H \mathbf{x} \end{cases}$$

各基底ベクトルとの内積



離散Fourier変換と座標変換

➤ 新しい正規直交基底 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{N-1}$ を考える。

$$x'_0 = \varphi_0^H x$$

$$x'_1 = \varphi_1^H x$$

⋮

$$x'_{N-1} = \varphi_{N-1}^H x$$

基底行列： $\Phi = [\varphi_0, \dots, \varphi_{N-1}]$

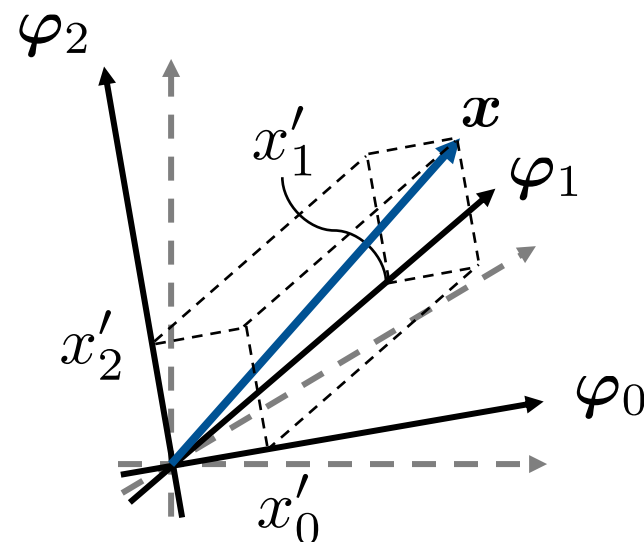
$$\mathbf{x}' = [x'_0, \dots, x'_{N-1}]^T$$

$$= \begin{bmatrix} \varphi_0^H \\ \vdots \\ \varphi_{N-1}^H \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$= \Phi^H \mathbf{x}$$



$N = 3$ の場合



離散Fourier変換と座標変換

➤ 以下を定義

$$W_N = \exp\left(j\frac{2\pi}{N}\right)$$

➤ 基底ベクトルを以下のようにおく。

$$\varphi_0 = \left[W_N^{0\cdot0}, W_N^{0\cdot1}, \dots, W_N^{0\cdot(N-1)} \right]^T$$

$$\varphi_1 = \left[W_N^{1\cdot0}, W_N^{1\cdot1}, \dots, W_N^{1\cdot(N-1)} \right]^T$$

⋮

$$\varphi_{N-1} = \left[W_N^{(N-1)\cdot0}, W_N^{(N-1)\cdot1}, \dots, W_N^{(N-1)\cdot(N-1)} \right]^T$$

➡ $\varphi_i^H \varphi_j = \begin{cases} N, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

$\{\varphi_n\}_{n=0}^{N-1}$ は正規化されていない
が直交基底となっている

離散Fourier変換と座標変換

➤ この $\{\varphi_n\}_{n=0}^{N-1}$ を用いた場合の座標変換は、

$$\begin{aligned}x'_k &= \langle \mathbf{x}, \varphi_k \rangle \\ &= \varphi_k^H \mathbf{x} \\ &= \left[W_N^{-k \cdot 0}, \dots, W_N^{-k \cdot (N-1)} \right] \mathbf{x} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp \left(-j \frac{2\pi nk}{N} \right)\end{aligned}$$

離散Fourier変換そのものになっている

離散Fourier変換の行列表現

➤ このときの基底行列を離散Fourier変換(DFT)行列と呼ぶ。

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} W_N^{0 \cdot 0} & W_N^{1 \cdot 0} & \cdots & W_N^{(N-1) \cdot 0} \\ W_N^{0 \cdot 1} & W_N^{1 \cdot 1} & \cdots & W_N^{(N-1) \cdot 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^{0 \cdot (N-1)} & W_N^{1 \cdot (N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{bmatrix}$$

- DFT行列は N 倍となっていることを除いて, 対称行列
($\mathbf{W}_N = \mathbf{W}_N^T$, $\mathbf{W}_N \neq \mathbf{W}_N^H$) かつユニタリ行列
($\mathbf{W}_N^H \mathbf{W}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^H = N \mathbf{I}_N$)
- $\mathbf{W}_N^* \mathbf{W}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^* = N \mathbf{I}_N$ となることより逆変換は複素共役との内積。

離散Fourier変換の行列表現

- このときの基底行列を離散Fourier変換(DFT)行列と呼ぶ。

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} W_N^{0 \cdot 0} & W_N^{1 \cdot 0} & \dots & W_N^{(N-1) \cdot 0} \\ W_N^{0 \cdot 1} & W_N^{1 \cdot 1} & \dots & W_N^{(N-1) \cdot 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^{0 \cdot (N-1)} & W_N^{1 \cdot (N-1)} & \dots & W_N^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{bmatrix}$$

- 離散Fourier変換

$$\text{DFT}[\mathbf{x}] = \mathbf{W}_N^H \mathbf{x} = \mathbf{X}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x[0], \dots, x[N-1]]^T \\ \mathbf{X} &= [X[0], \dots, X[N-1]]^T \end{aligned}$$

- 逆離散Fourier変換

$$\text{DFT}^{-1}[\mathbf{X}] = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N \mathbf{X} = \mathbf{x}$$

巡回畳み込みの固有関数



- 以下の2つの数列の巡回畳み込みを考える。

$$\mathbf{h} = [h_0, \dots, h_{N-1}]^T$$

$$\mathbf{v} = [v_0, \dots, v_{N-1}]^T = [1, W_N^k, \dots, W_N^{(N-1)k}]^T$$

- 巡回畳み込みによって生成される数列の第 n 要素は、

$$\begin{aligned} (h_n \circledast v_n)_n &= \sum_{m=0}^{N-1} v_{(n-m) \bmod N} h_m \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} W_N^{k[(n-m) \bmod N]} h_m \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} W_N^{k(n-m)} h_m \\ &= \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} h_m W_N^{-km}}_{\lambda_k} \underbrace{W_N^{kn}}_{v_n} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{↻} \\ W_N^N = 1 \end{array}$$



- 複素指数関数の数列 $(v_n)_{n=0}^{N-1}$ に対して巡回畳み込みを行うと、 λ_k 倍された同じ数列 $(v_n)_{n=0}^{N-1}$ が得られる。

$$(h_n \circledast v_n)_n = \lambda_k v_n$$

$$\text{ここで, } v_n = W_N^{kn}, \quad \lambda_k = \sum_{m=0}^{N-1} h_m W_N^{-km}$$

- $(v_n)_{n=0}^{N-1}$ が巡回畳み込みの固有関数であり、 λ_k がその固有値であることを意味する。
- k が(離散)周波数、 λ_k が周波数応答に対応する。

離散時間線形時不変システムを扱う上で
離散Fourier変換が重要な役割を持つ理由



- Fourier変換，離散時間Fourier変換も同様の性質を持つ。

離散時間Fourier変換：

$$v_n = \exp(j\omega n) \text{ として,}$$

$$\begin{aligned} (h_n * v_n)_n &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{n-k} h_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp(j\omega(n-k)) h_k \\ &= \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp(-j\omega k) h_k}_{\lambda_\omega} \underbrace{\exp(j\omega n)}_{v_n} \end{aligned}$$



- Fourier変換，離散時間Fourier変換も同様の性質を持つ。

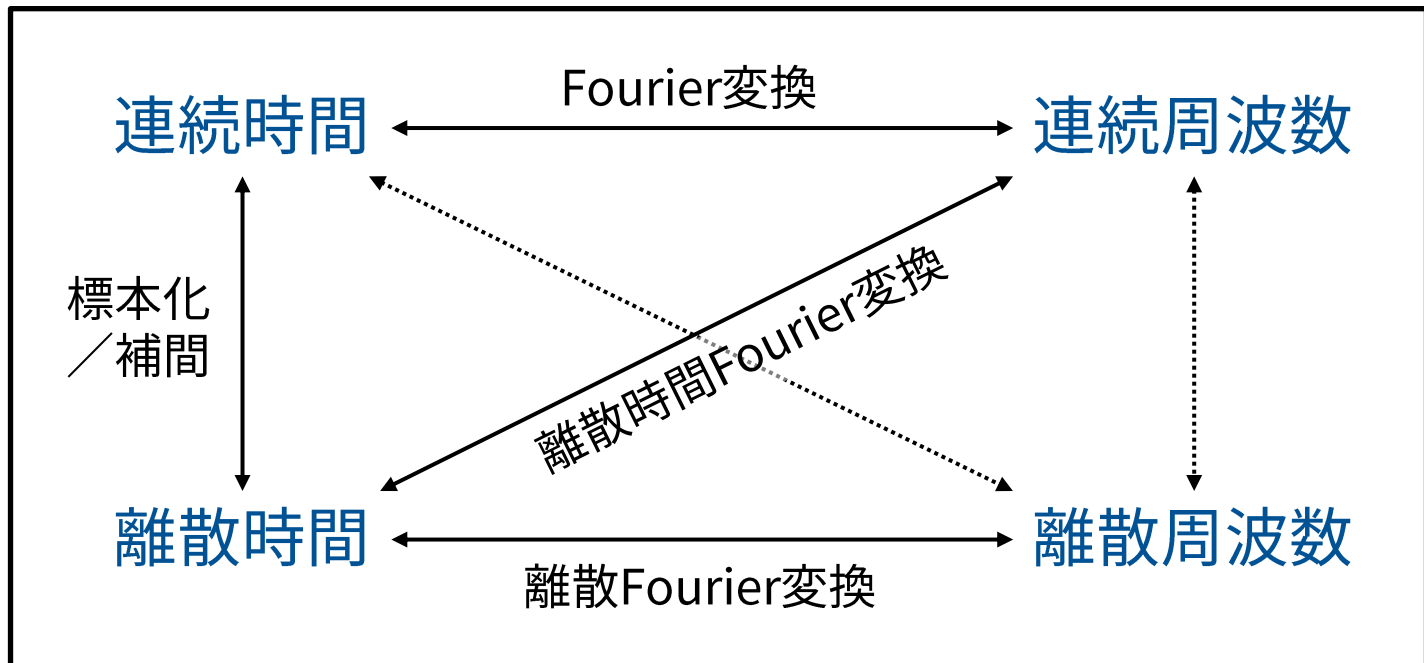
Fourier変換：

$$v(t) = \exp(j\omega t) \text{ として,}$$

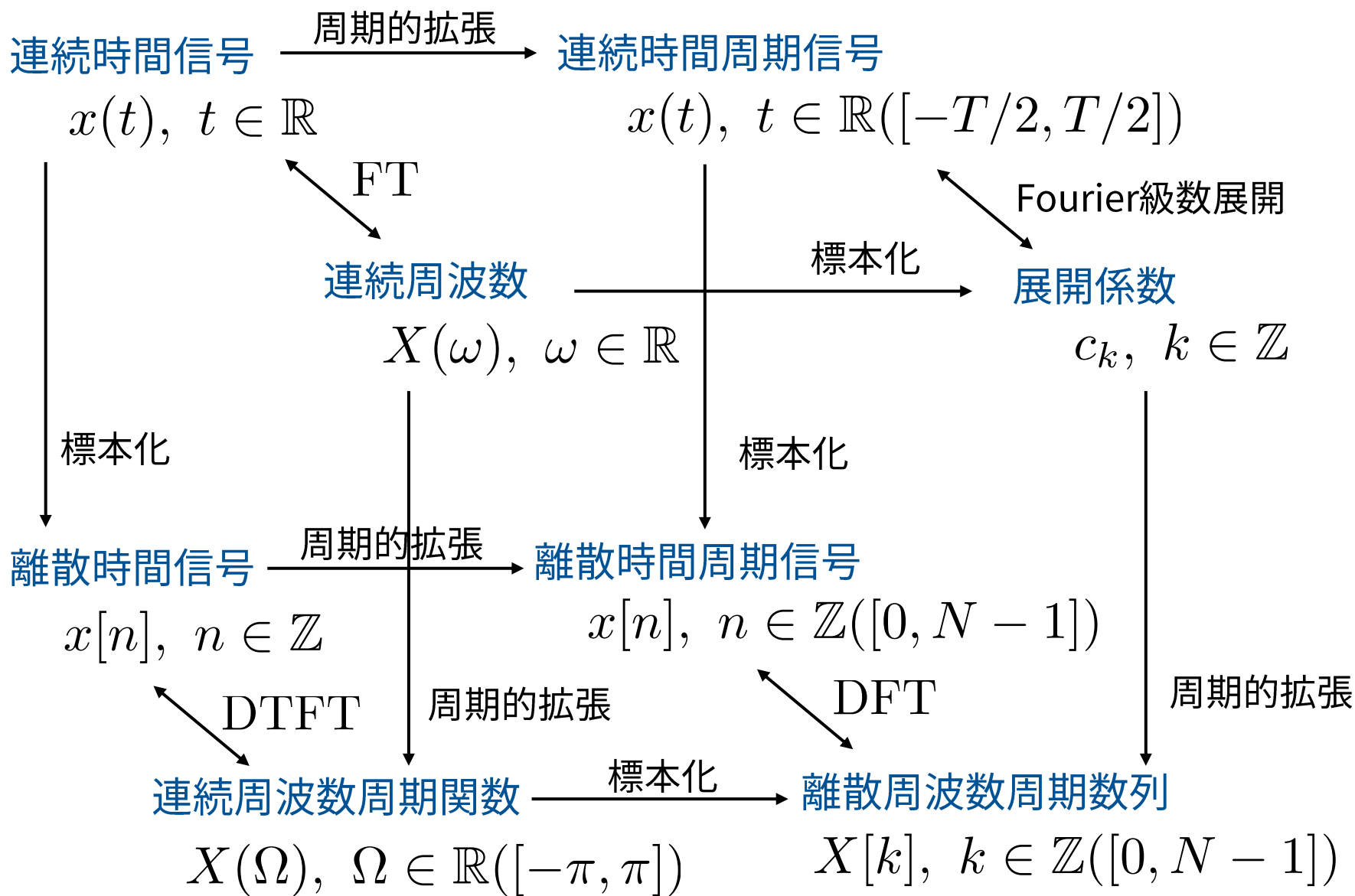
$$\begin{aligned} h(t) * v(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t - \tau) h(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega(t - \tau)) h(\tau) d\tau \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega\tau) h(\tau) d\tau}_{\lambda_\omega} \underbrace{\exp(j\omega t)}_{v(t)} \end{aligned}$$

- ➡ 線形時不変システムの特徴は周波数応答によって完全に記述できる。

Fourier変換まとめ



Fourier変換まとめ (詳細版)



参考文献

1. 眞溪歩, "デジタル信号処理工学," 昭晃堂, 2004.
2. M. Vetterli, J. Kovačević, and V. K. Goyal, "Foundations of Signal Processing," Cambridge University Press, 2014.
3. M. Unser, "Sampling – 50 Years After Shannon," Proc. IEEE, vol. 88, no.4, pp. 569-587, 2000.