

信号処理論第一：第4回

Fourier変換・離散時間Fourier変換

東京大学 大学院情報理工学系研究科 システム情報学専攻

小山 翔一

講義の目的と概要

➤ 講義の目的

- 信号処理の基礎を習得する。

➤ 講義の概要

- 決定論的信号（確定的信号）に関する信号処理について、基礎事項を理解する。本講義では、できるだけ特定の応用分野に限らない、一般的な信号処理論について講義する。ただし、統計的信号処理については扱わず、信号処理論第二の範囲となる。

➤ キーワード

- Fourier級数, Fourier変換, 離散時間Fourier変換, 離散Fourier変換, FFT, 窓Fourier変換, 線形時不変システム, サンプリング定理, インパルス応答, 伝達関数, 周波数応答, 差分方程式, ブロック線図, 因果性, 安定性, FIRフィルタ, IIRフィルタ

講義スケジュール

➤ Sセメスター 金曜 1 限 (8:30-10:15) @63 / zoom

➤ 日程 (暫定版)

■ 4/ 8	第 1 回	] 小山 担当	■ 6/3	第 7 回	] 堀崎 担当
■ 4/15	第 2 回		■ 6/10	第 8 回	
■ 4/22	第 3 回		■ 6/17	第 9 回	
■ 5/ 6	第 4 回		■ 6/24	第 10 回	
■ 5/13	第 5 回		■ 7/ 1	第 11 回	
■ 5/20	第 6 回		■ 7/ 8	第 12 回	
■ 5/27	第 7 回		■ 7/22	学期末試験	

【注意】

- 第1回(4/8), 第2回(4/15)はオンラインのみで実施。
- 第3回以降は対面・オンライン併用のハイブリッド形式。
- 第7回(5/27)はオンラインのみでの小テストとなる予定。
- 学期末試験の実施方法は未定。

ハイブリッド講義の実施方法

- 対面側は63講義室，オンライン側はzoom
(<https://zoom.us/>) を用いて実施。
- 講義のURLは前半・後半それぞれで毎回同じにする予定。
後半(6/3)からはURLが変更となるので必ずITC-LMSを確認すること。
- オンライン受講者で質問がある場合は，チャットに書き込む，あるいはミュートをオフにして音声で質問する，のいずれの方法でも良い。
- 教員の連絡先

shoichi_koyama@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

horisaki@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

➤ 講義資料・動画

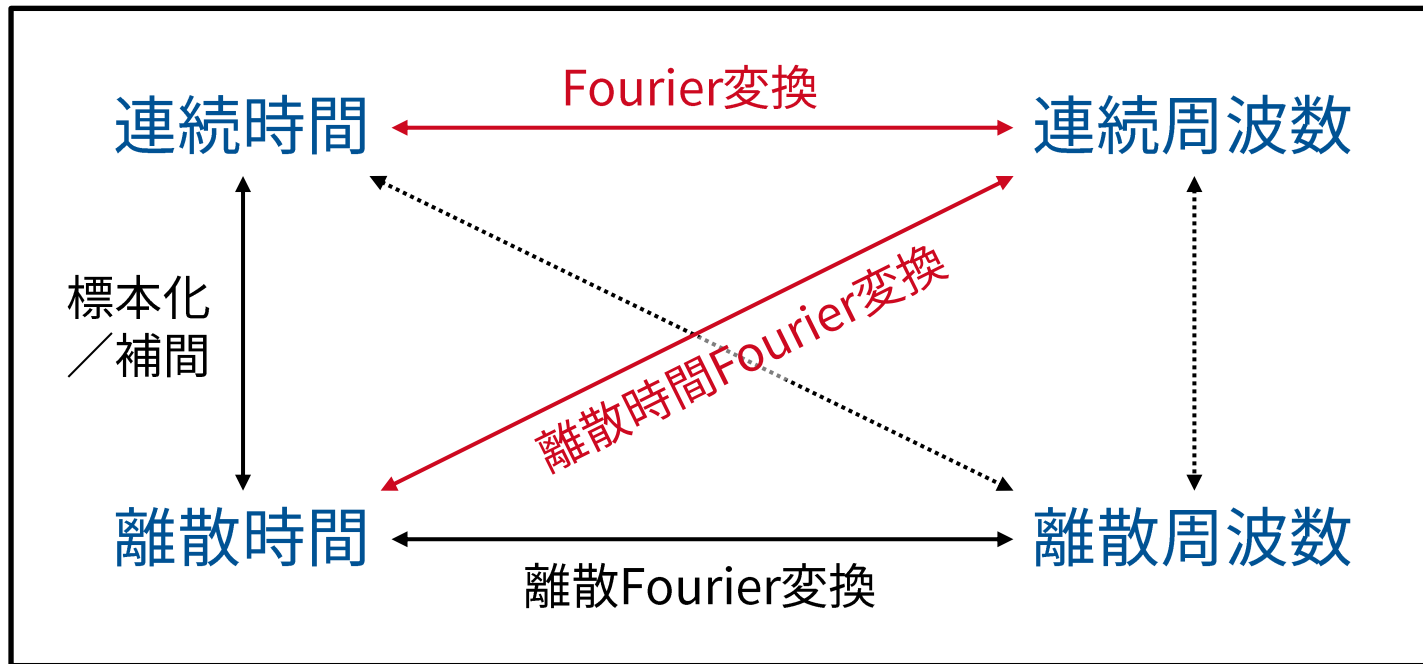
- ITC-LMSにアップロード
- 資料はできるだけ講義前日までにアップロードするようにします。

➤ 成績評価

- 学期末試験（暫定）
- 第7回（5/27）にオンラインで実施予定の小テスト

本日の目次

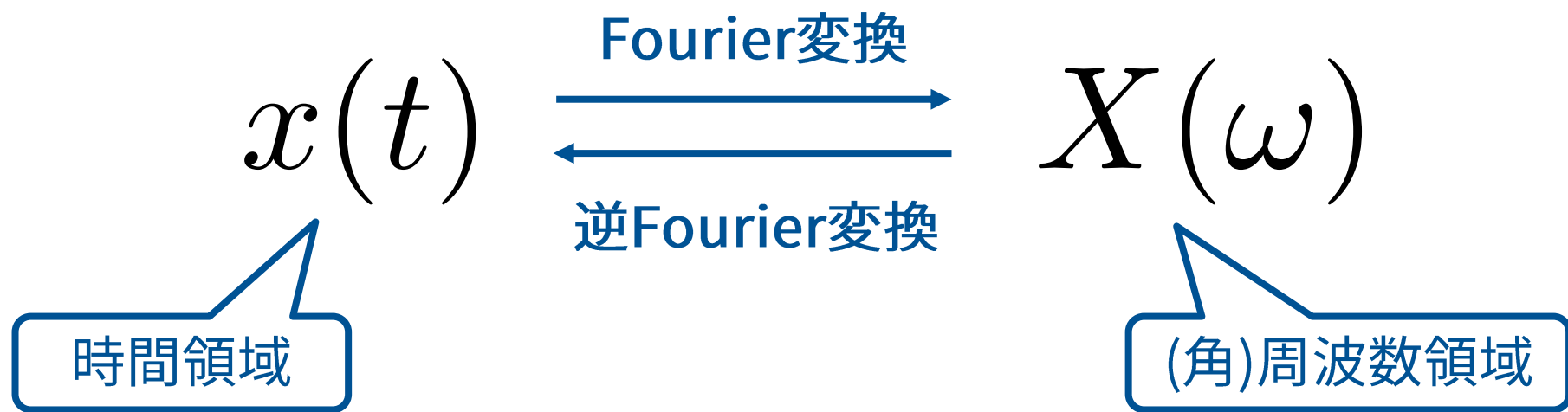
1. Fourier変換
2. 離散時間Fourier変換



FOURIER変換

Fourier変換

- Fourier変換は、連続時間信号から連続周波数成分への変換を行い、これらは信号の等価な表現となる。



Fourier級数からFourier変換へ

➤ Fourier級数展開再考

- Fourier級数展開は，信号の近似が目的
- 対象は周期信号でなければならない
 - 周期信号という制約によって，連続(非可算)無限個の自由度を持つ信号を，可算無限個の基底への展開で表すことができた。
- 収束するなら， $x(t)$ と $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ は等価な情報
 - どちらを見るかは視点の違い

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp \left(j \frac{2\pi k t}{T} \right)$$

Fourier級数からFourier変換へ

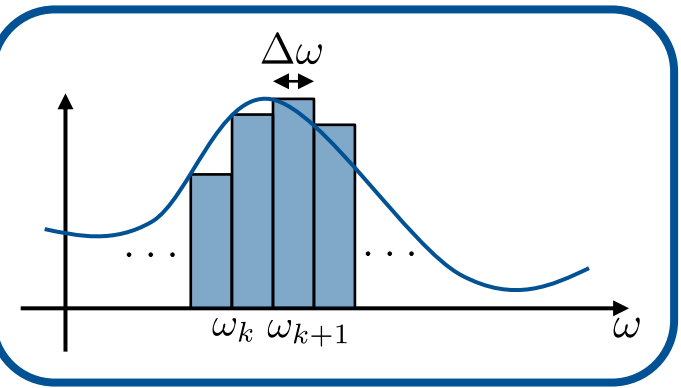
➤ Fourier級数展開の非周期信号への拡張

- $\Delta\omega = 2\pi/T$, $\omega_k = 2\pi k/T$ と置き換える。

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left(-j\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \right] \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-j\omega_k t) dt \right] \exp(j\omega_k t) \Delta\omega \end{aligned}$$

- $T \rightarrow \infty$ ($\Delta\omega \rightarrow 0$) とすれば,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt \right] \exp(j\omega t) d\omega$$



Fourier変換の定義

➤ 連続時間信号から連続周波数の複素数値関数への変換

- Fourier変換

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$$

$(\omega \in \mathbb{R})$

- 逆Fourier変換

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

$(t \in \mathbb{R})$

Fourier変換の定義

- Fourier変換と逆Fourier変換を以下のように表記。

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = x(t)$$

- Fourier変換対を以下のように表記。

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(\omega)$$

Fourier変換の定義

- Fourier変換は（形式上） $L^2(\mathbb{R})$ での内積の形となっている。

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \langle x(t), \exp(j\omega t) \rangle$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \langle X(\omega), \exp(-j\omega t) \rangle$$

- （形式上と書いたのは $\exp(j\omega t) \notin L^2(\mathbb{R})$ のため。）

- 以下の定義では，Fourier変換は正規化された変換となる。

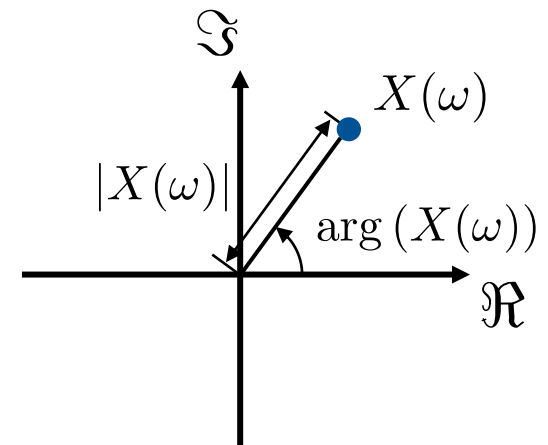
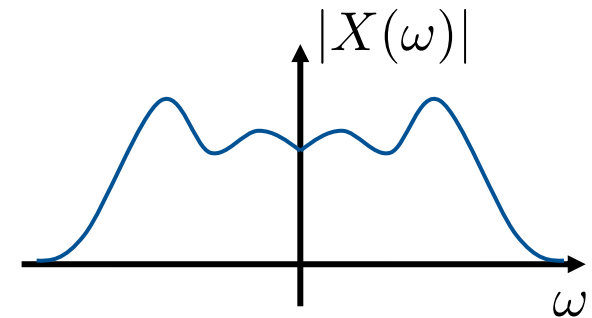
$$X(\omega) = \left\langle x(t), \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp(j\omega t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp(-j\omega t) dt$$

$$x(t) = \left\langle X(\omega), \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp(-j\omega t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp(j\omega t) d\omega$$

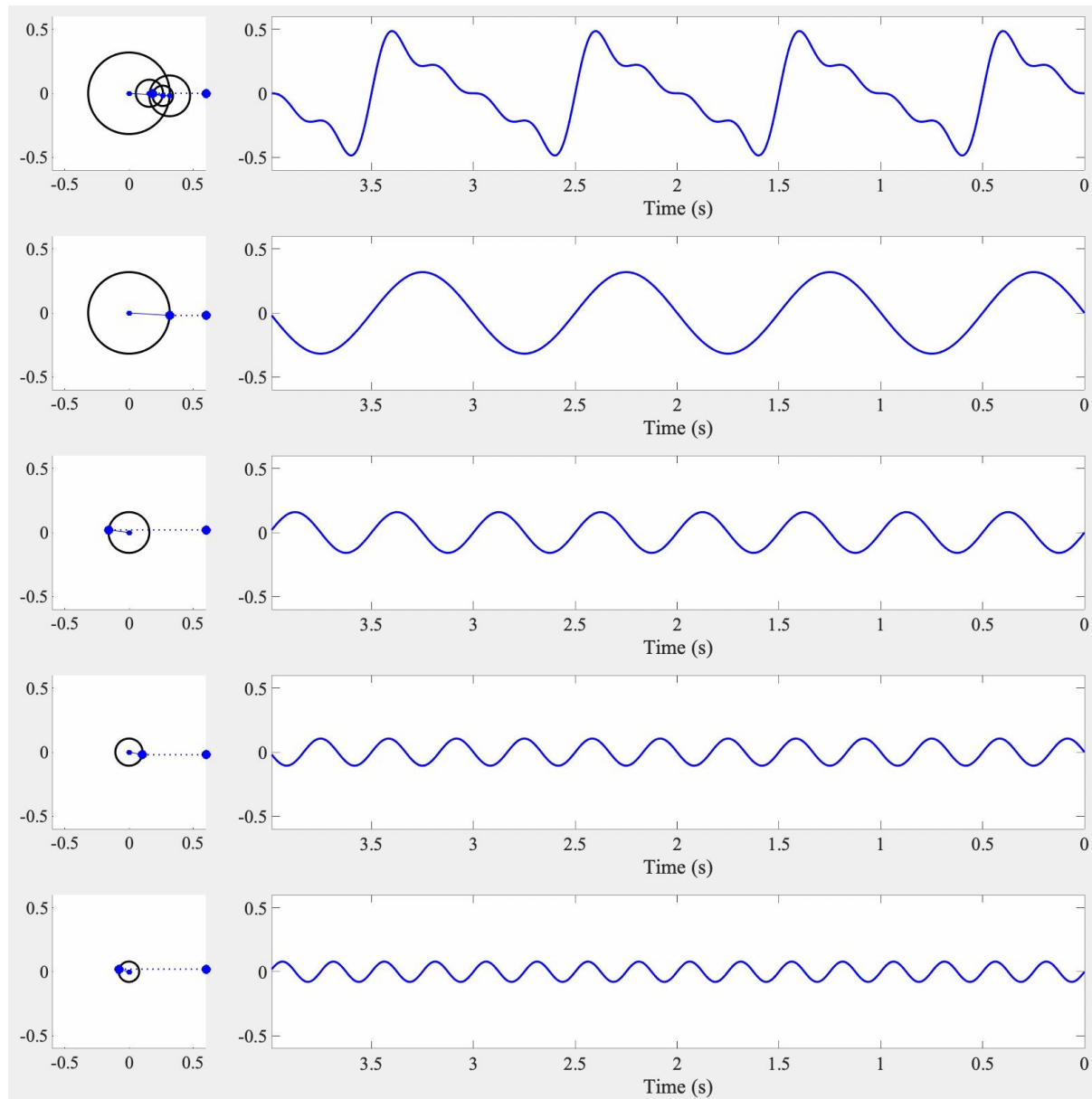
- ここでも慣習的に使われる前々スライドの定義を用いる。

Fourier変換の意味

- ω : (角)周波数
- $X(\omega)$ を変数 ω の複素数値関数と見るとき
 - $X(\omega)$: (角)周波数スペクトル
 - $|X(\omega)|$: 振幅スペクトル
 - $|X(\omega)|^2$: パワースペクトル
 - $\arg(X(\omega))$: 位相スペクトル
- $X(\omega)$ を ω での複素数値 (スカラー) と見るとき
 - $|X(\omega)|$: 振幅
 - $|X(\omega)|^2$: パワー
 - $\arg(X(\omega))$: 位相



Fourier変換の意味





➤ $x(t) \in L^1(\mathbb{R})$ (絶対可積分関数)であればFourier変換可能。

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ x(t) \left| \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \right. \right\}$$

絶対可積分関数のFourier変換は有界かつ連続

➤ 有界性の証明：

$$\begin{aligned} |X(\omega)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| |\exp(-j\omega t)| dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \\ &< \infty \end{aligned}$$

Fourier変換可能な関数



- Fourier変換を $L^1(\mathbb{R})$ から $L^2(\mathbb{R})$ の関数に拡張することは単純ではないが、結論から言うと $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ も Fourier変換可能であり、 $X(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ となる。
 - $x(t) \notin L^1(\mathbb{R})$ であるために Fourier変換の積分が計算できない場合も、 $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ であればその Fourier変換の存在が保証される。

- $L^1(\mathbb{R})$ でも $L^2(\mathbb{R})$ でもない関数は Fourier変換できる？

➡ 超関数の概念が必要となる

- 例： $x(t) = 1$ の場合

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \exp(-j\omega t) dt \\ &= 2\pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

➡ $1 \xleftrightarrow{\text{FT}} 2\pi\delta(\omega)$

Diracのデルタ関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t - \alpha)dt = \varphi(\alpha)$$

$$\left[\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \right]$$

※厳密には正しい記述ではない

Fourier級数展開との違い

- 近似を目的としていない。
 - (角)周波数を変数とする連続関数（周波数領域）への等価な「変換」が目的であり，周波数成分の分析などを可能とする。
- 対象とする関数が周期関数でなくてよい。
 - ただし，厳密にはFourier変換可能な関数のクラスが存在することに注意。

Fourier変換の性質

$x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(\omega)$, $y(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(\omega)$ とする。

➤ 線形性

$$\mathcal{F} [\alpha x(t) + \beta y(t)] = \alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)$$

➤ 時間シフト（周波数シフト）

$$\mathcal{F} [x(t - \tau)] = \exp(-j\omega\tau) X(\omega)$$

$$(\mathcal{F}^{-1} [X(\omega - \omega_0)] = \exp(j\omega_0 t) x(t))$$

Proof $\mathcal{F} [x(t - \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \exp(-j\omega t) dt$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \exp(-j\omega(u + \tau)) du$

$= \exp(-j\omega\tau) \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \exp(-j\omega u) du$

$= \exp(-j\omega\tau) X(\omega)$

変数変換：
 $u = t - \tau$

Fourier変換の性質

➤ 複素共役

$$\mathcal{F}[x^*(t)] = X^*(-\omega)$$
$$(\mathcal{F}^{-1}[X^*(\omega)] = x^*(-t))$$

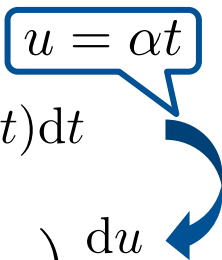
Proof

$$\begin{aligned} X^*(-\omega) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(j\omega t) dt \right)^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \exp(-j\omega t) dt \\ &= \mathcal{F}[x^*(t)] \end{aligned}$$

➤ スケール変換

$$\mathcal{F}[x(\alpha t)] = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Proof

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(\alpha t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha t) \exp(-j\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \exp\left(-j\frac{\omega}{\alpha}u\right) \frac{du}{|\alpha|} \\ &= \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \end{aligned}$$


Fourier変換の性質

➤ 畳み込みと積

$$\mathcal{F}[x(t) * y(t)] = X(\omega)Y(\omega)$$

$$\mathcal{F}[x(t)y(t)] = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$

Proof

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x(t) * y(t)] &= \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau\right] \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \exp(-j\omega t)dt \\&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) \exp(-j\omega t)dt\right] d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp(-j\omega\tau)Y(\omega)d\tau \\&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp(-j\omega\tau)d\tau\right] Y(\omega) \\&= X(\omega)Y(\omega)\end{aligned}$$

時間シフト



Fourier変換の性質

➤ Parsevalの等式（一般化Parsevalの等式）

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y^*(\omega)d\omega \right)$$

Proof

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y^*(\omega)d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t) \exp(-j\omega t)dt \right]^* d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} y^*(t) \exp(j\omega t)dt d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t)d\omega \right] y^*(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt \end{aligned}$$

Fourier変換の性質

➤ 微分

$$\mathcal{F} \left[\frac{d}{dt} x(t) \right] = j\omega X(\omega)$$

$$\left(\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{d}{d\omega} X(\omega) \right] = -jtx(t) \right)$$

Proof

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\frac{d}{dt} x(t) \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} x(t) \exp(-j\omega t) dt \\ &= x(t) \exp(-j\omega t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt \\ &= j\omega X(\omega) \end{aligned}$$

部分積分

絶対可積分の条件より0

Fourier変換の性質

➤ 相関関数

$$\mathcal{F}[r_{xy}(\tau)] = X(\omega)Y^*(\omega)$$

$$\mathcal{F}[r_{xx}(\tau)] = |X(\omega)|^2$$

Wiener-Khinchinの定理

ここで,

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt \quad : \text{相互相関関数}$$

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt \quad : \text{自己相関関数}$$

Proof

$$\mathcal{F}[r_{xy}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt \right] \exp(-j\omega\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(-(\tau-t))dt \right] \exp(-j\omega\tau)d\tau$$

畳み込み
の定義

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) * y^*(-\tau) \exp(-j\omega\tau)d\tau$$

$$= X(\omega)Y^*(\omega)$$

畳み込みと積,
複素共役の性質

Fourier変換の性質

➤ 対称性

$x(t)$		$X(\omega)$	
$\Re$	$\Im$	$\Re$	$\Im$
even	0	even	0
odd	0	0	odd
0	even	0	even
0	odd	odd	0

※ 証明はFourier級数の場合と同様

Fourier変換の例 1/4

➤ 矩形波パルス

$$x(t) = \text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} 1 \cdot \exp(-j\omega t) dt$$

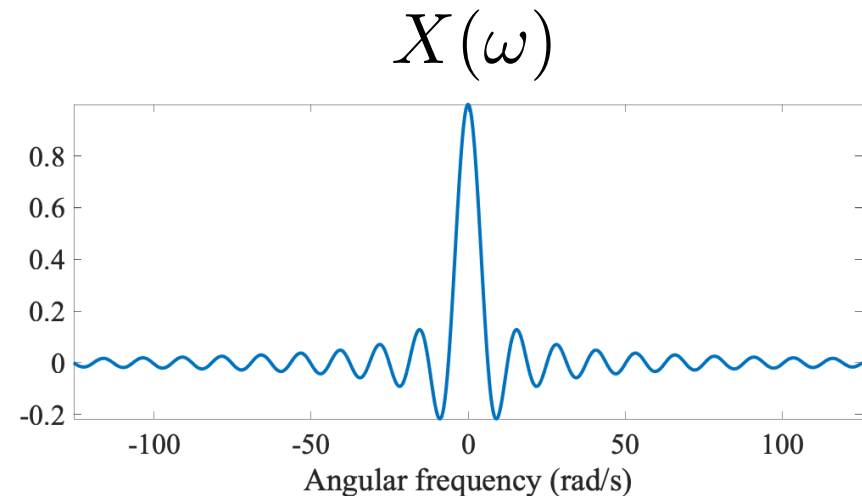
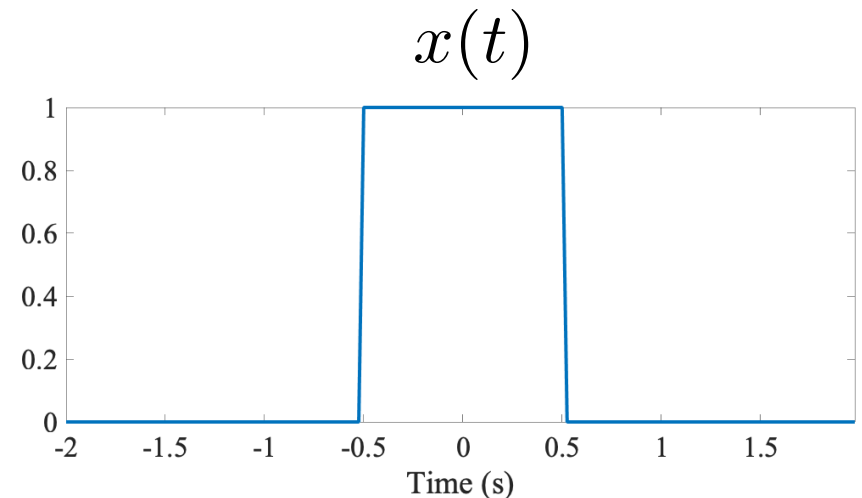
$$= \frac{-1}{j\omega} \exp(-j\omega t) \Big|_{-1/2}^{1/2}$$

$$= \frac{2 \exp(j\frac{\omega}{2}) - \exp(-j\frac{\omega}{2})}{\omega \cdot 2j}$$

$$= 2 \frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega}$$

$$= \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

(非正規化)sinc関数



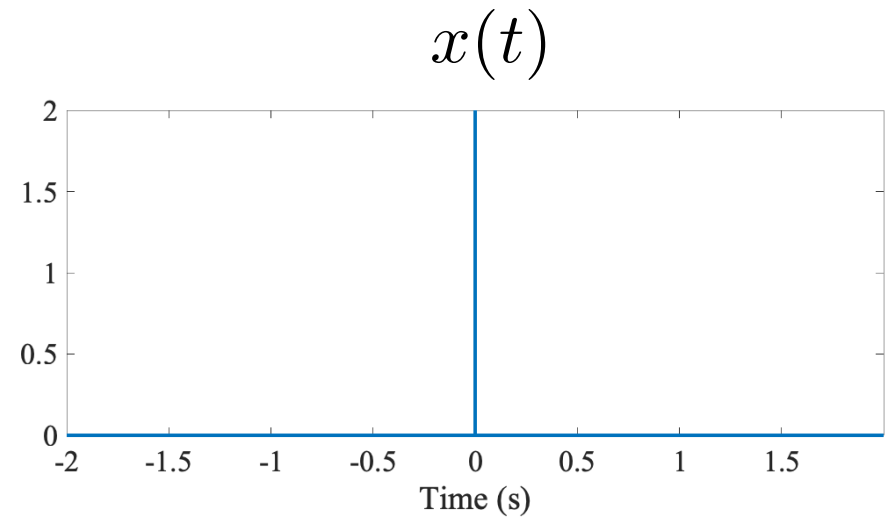
Fourier変換の例 2/4

➤ Diracのデルタ関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t - \alpha) dt = \varphi(\alpha)$$

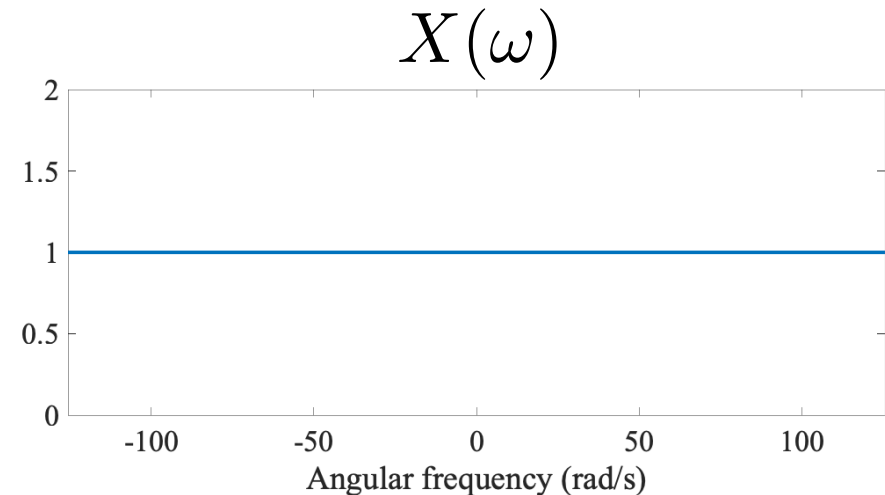
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

※厳密には正しい記述ではない



$$x(t) = \delta(t)$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-j\omega t) dt \\ &= \exp(-j\omega \cdot 0) \\ &= 1 \end{aligned}$$



Fourier変換の例 3/4

- Diracのデルタ関数－時間シフトを含む場合

$$x(t) = \delta(t - \tau)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) \exp(-j\omega t) dt$$

$$= \exp(-j\omega\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$= \exp(-j\omega\tau)$$

時間シフト
の性質

$\delta(t)$ の
Fourier変換

Fourier変換対

➤ Fourier変換と逆変換のペアとなる関数

– 例1/4

$$\text{rect}(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad \text{sinc}\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{\text{FT}} 2\pi\text{rect}(\omega)$$

– 例2/4

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} 1 \qquad 1 \xleftrightarrow{\text{FT}} 2\pi\delta(\omega)$$

– 例3/4

$$\delta(t - \tau) \xleftrightarrow{\text{FT}} \exp(-j\omega\tau) \qquad \exp(j\omega_0 t) \xleftrightarrow{\text{FT}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$



➤ Fourier変換と逆変換のペアとなる関数

– 例1/4

$$\text{rect}(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad \text{sinc}\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{\text{FT}} 2\pi \text{rect}(\omega)$$

- 矩形関数は $L^1(\mathbb{R})$ の関数であり，そのFourier変換は直接計算できる
- sinc関数は $L^1(\mathbb{R})$ ではないが $L^2(\mathbb{R})$ の関数
- sinc関数のFourier変換を直接計算しようとするとう積分計算が厄介だが， $L^2(\mathbb{R})$ であることよりFourier変換が存在することは保証される
- 矩形関数の逆Fourier変換を計算することで，厄介な積分計算を避けてsinc関数のFourier変換対が得られる

Fourier変換の例 4/4

➤ デルタ列

周期 T のデルタ関数の列

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- 一旦，周期関数であるデルタ列のFourier級数展開表現を考える。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left(-j\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \exp\left(-j\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$= \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(j\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

Fourier変換の例 4/4

➤ デルタ列

- デルタ列のFourier級数展開をFourier変換すれば,

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \exp(-j\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(j\frac{2\pi nt}{T}\right) \exp(-j\omega t) dt \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right) \end{aligned}$$

Fourier
級数展開

$\exp(j\omega_0 t) \xleftrightarrow{\text{FT}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

➡ デルタ列のFourier変換もまたデルタ列となる

周波数を用いたFourier変換の定義

- 角周波数 ω ではなく周波数 f を用いて定義する。

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df$$

- 線形性，畳み込み，スケール変換の性質はそのまま。
- 乗算，微分の性質，Parsevalの等式は係数が異なる。

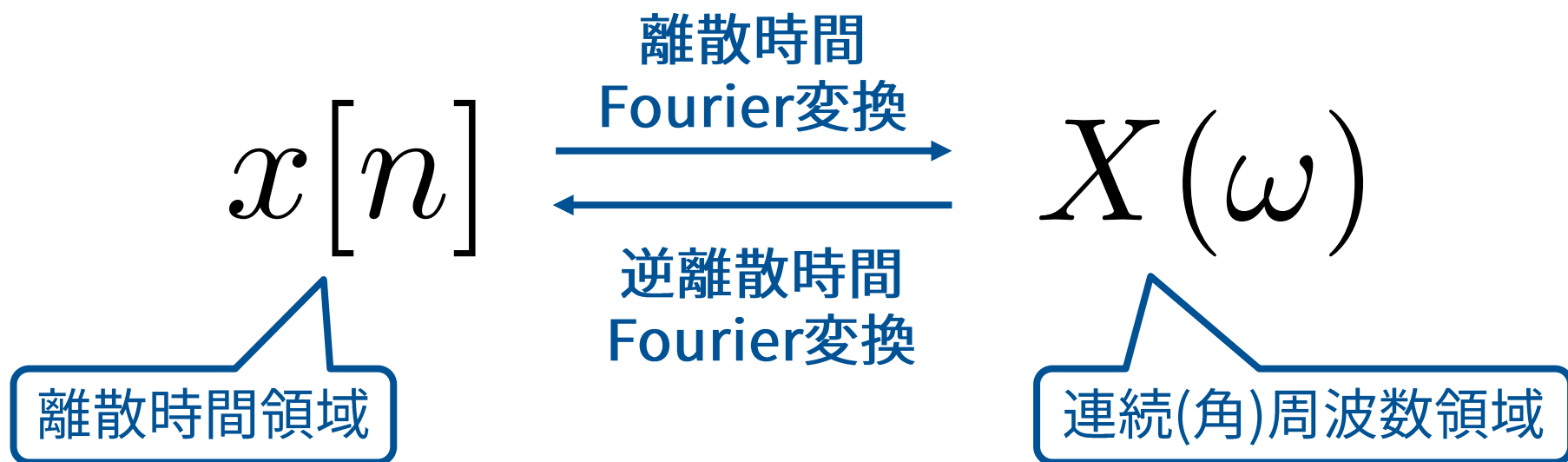
$$\mathcal{F}[x(t)y(t)] = X(f) * Y(f) \qquad \mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = j2\pi f X(f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

離散時間FOURIER変換

離散時間Fourier変換

- 離散時間Fourier変換は、離散時間信号（デジタル信号）を連続周波数成分に変換することを目的とする。

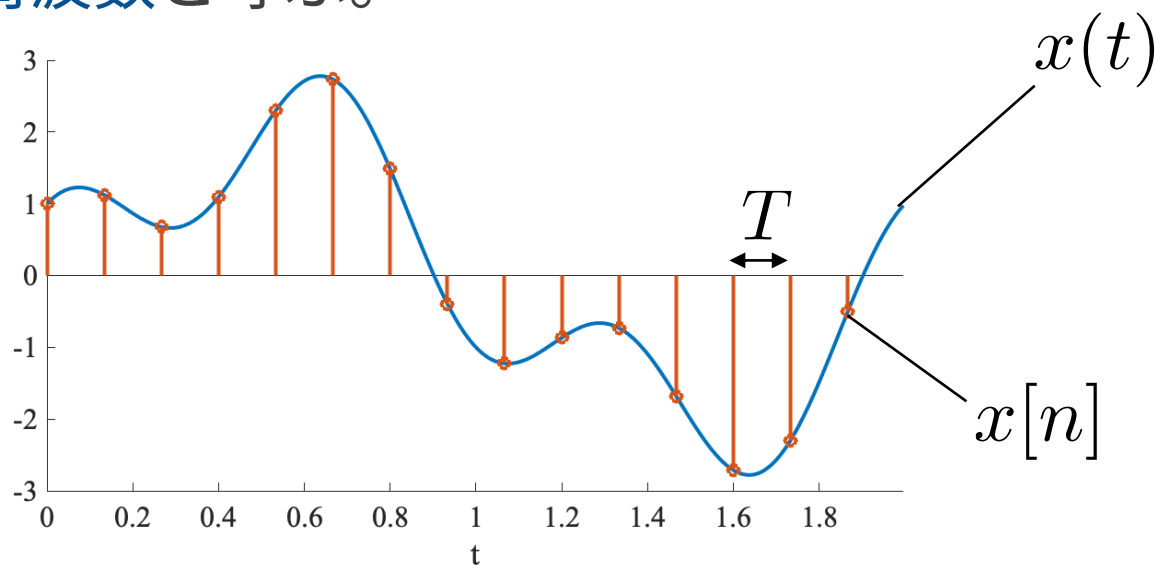


離散時間Fourier変換

- 離散時間信号を連続時間信号を用いて表現する。
- 一定時間間隔 T ごとの連続時間信号 $x(t)$ の値を離散時間信号とすれば,

$$x[n] = x(nT) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

この操作を**標本化**あるいは**サンプリング**と呼び, サンプリングの時間間隔 T を**サンプリング周期**, その逆数を**サンプリング周波数**と呼ぶ。



離散時間Fourier変換

➤ 離散時間信号をFourier変換すると、

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - nT)}^{x[n] \text{ の形式的な表現}} \exp(-j\omega t) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \exp(-j\omega nT) \end{aligned}$$

➡ 規格化周波数を用いて書き換え

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-j\Omega n)$$

$$\Omega = \omega T = 2\pi \frac{f}{1/T} : \text{規格化周波数}$$

➤ $X(\Omega)$ は周期 2π の周期関数

$$\begin{aligned} X(\Omega + 2\pi m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-j(\Omega + 2\pi m)n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-j\Omega n) \\ &= X(\Omega) \end{aligned}$$

離散時間Fourier変換の定義

➤ 離散時間信号から連続周波数の複素数値関数への変換

- 離散時間Fourier変換

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-j\Omega n) \quad (\Omega \in \mathbb{R})$$

- 逆離散時間Fourier変換

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \exp(j\Omega n) d\Omega \quad (n \in \mathbb{Z})$$

積分区間は 2π の連続した区間であればよい
(導出は後日・・・)

離散時間Fourier変換の定義

- 離散時間Fourier変換と逆離散時間Fourier変換を以下のように表記。

$$\text{DTFT} [x[n]] = X(\Omega)$$

$$\text{DTFT}^{-1} [X(\Omega)] = x[n]$$

- 離散時間Fourier変換対を以下のように表記。

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(\Omega)$$

離散時間Fourier変換の定義

- 離散時間Fourier変換を内積の形で表すと,

$$X(\Omega) = \langle x[n], \exp(j\Omega n) \rangle$$

$\ell^2(\mathbb{Z})$ での内積

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \langle X(\Omega), \exp(-j\Omega n) \rangle$$

$L^2([-\pi, \pi])$ での内積



- 数列 $x[n]$ ($n \in \mathbb{Z}$) が $\ell^1(\mathbb{Z})$ であれば離散時間Fourier変換が存在し、絶対収束する。

$$\begin{aligned} |X(\Omega)| &= \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \exp(-j\Omega n) \right| \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x[n] \exp(-j\Omega n)| \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x[n]| |\exp(-j\Omega n)| \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x[n]| \\ &= \|x\|_1 \\ &< \infty \end{aligned}$$

$\ell^1(\mathbb{Z})$ 以外へ拡張する場合は収束の意味に変更を加えることが必要

離散時間Fourier変換の性質

➤ 線形性

$$\text{DTFT} [\alpha x[n] + \beta y[n]] = \alpha X(\Omega) + \beta Y(\Omega)$$

➤ 時間シフト（周波数シフト）

$$\text{DTFT} [x[n - m]] = \exp(-j\Omega m) X(\Omega)$$

$$(\text{DTFT}^{-1} [X(\Omega - \Omega_0)] = \exp(j\Omega_0 n) x[n])$$

➤ 複素共役

$$\text{DTFT} [x^*[n]] = X^*(-\Omega)$$

$$(\text{DTFT}^{-1} [X^*(\Omega)] = x^*[-n])$$

離散時間Fourier変換の性質

➤ 畳み込みと積

$$\text{DTFT} [x[n] * y[n]] = X(\Omega)Y(\Omega)$$

$$\text{DTFT} [x[n]y[n]] = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) \odot Y(\Omega)$$

Proof

$$\begin{aligned} \text{DTFT} [x[n]y[n]] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n] \exp(-j\Omega n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega') \exp(j\Omega' n) d\Omega' y[n] \exp(-j\Omega n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega') \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \exp(-j(\Omega - \Omega')n) d\Omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega') Y(\Omega - \Omega') d\Omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} X(\Omega) \odot Y(\Omega) \end{aligned}$$

 巡回畳み込み
の定義

離散時間Fourier変換の性質

➤ Parsevalの等式（一般化Parsevalの等式）

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$
$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)Y^*(\Omega)d\Omega \right)$$

➤ 相関関数

$$\text{DTFT} [r_{xy}[m]] = X(\Omega)Y^*(\Omega)$$

$$\text{DTFT} [r_{xx}[m]] = |X(\Omega)|^2$$

$$\text{ここで, } r_{xy}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n-m]$$

離散時間Fourier変換の性質

➤ 対称性

$x[n]$		$X(\Omega)$	
$\Re$	$\Im$	$\Re$	$\Im$
even	0	even	0
odd	0	0	odd
0	even	0	even
0	odd	odd	0

離散時間Fourier変換とFourier級数展開

- 離散時間Fourier変換はFourier級数展開を周波数領域の関数に対して適用した形とも見れる。

離散時間Fourier変換

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-j\Omega n)$$

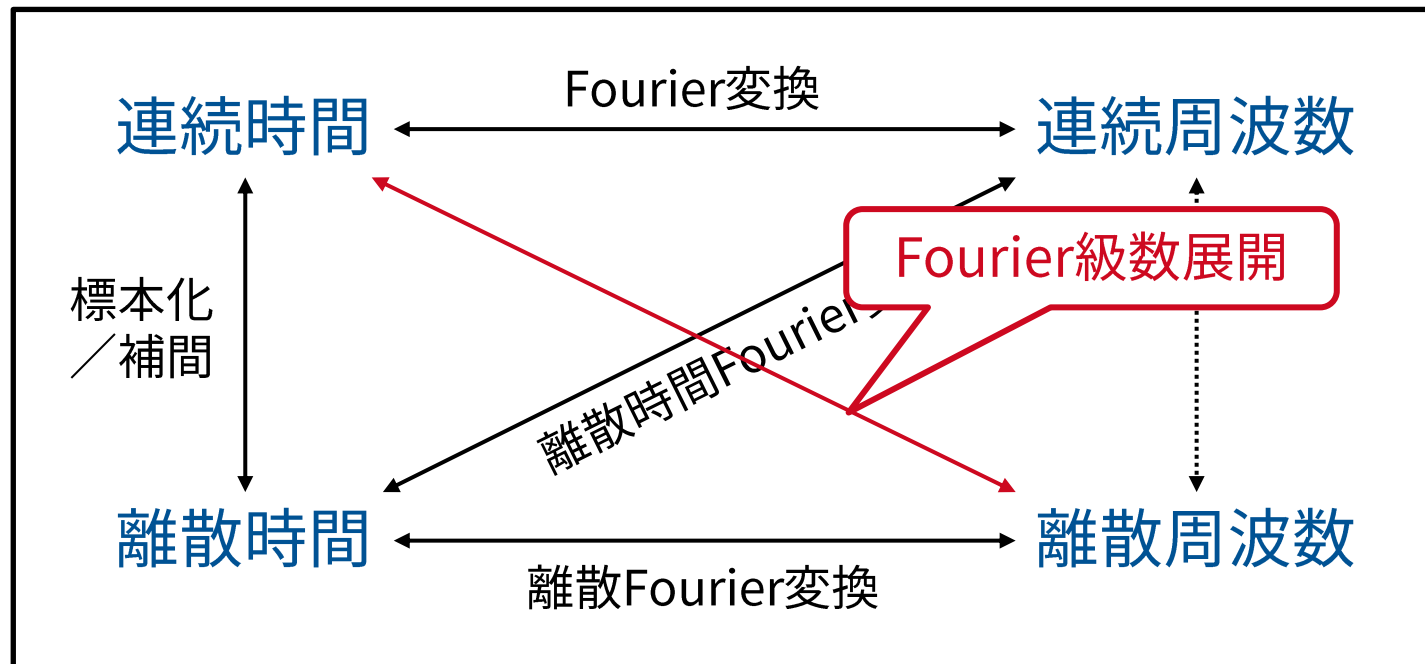
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \exp(j\Omega n) d\Omega$$

Fourier級数展開

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left(-j\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

離散時間Fourier変換とFourier級数展開



- Fourier級数展開もFourier変換で見たような性質を持つ
- Parsevalの等式, 対称性についてはすでに示した
 - 線形性, 畳み込みと乗算, 時間シフト・周波数シフト, 複素共役, 相関関数の性質なども成り立つ

参考文献

1. 眞溪歩, "ディジタル信号処理工学," 昭晃堂, 2004.
2. M. Vetterli, J. Kovačević, and V. K. Goyal, "Foundations of Signal Processing," Cambridge University Press, 2014.