信号処理論第一：第7回
信号処理のための複素関数論

東京大学 大学院情報理工学系研究科 システム情報学専攻
小山 翔一

講義の目的と概要

- 講義の目的
  - 信号処理の基礎を習得する。

- 講義の概要
  - 決定論的信号（確定的信号）に関する信号処理について，基礎事項を理解する。本講義では，できるだけ特定の応用分野に限らない，一般的な信号処理論について講義する。ただし，統計的信号処理については扱わず，信号処理論第二の範囲となる。

- キーワード
  - Fourier級数, Fourier変換, 離散時間Fourier変換, 離散Fourier変換, FFT, 窓Fourier変換, 線形時不変システム, サンプリング定理, インパルス応答, 伝達関数, 周波数応答, 差分方程式, ブロック線図, 因果性, 安定性, FIRフィルタ, IIRフィルタ

講義スケジュール

- Sセメスター 金曜１限 (8:30-10:15) @オンライン

- 日程（暫定版）
  - 4/ 9　第１回
  - 4/16　第２回
  - 4/23　第３回
  - 4/ 30　第４回
  - 5/ 7　第５回
  - 5/14　第６回
  - 5/21　第７回

小山担当

  - 5/28　休講
  - 6/4　第７回
  - 6/11　第８回
  - 6/18　第９回
  - 6/25　第１０回
  - 7/ 2　第１１回
  - 7/ 9　第１２回
  - 7/30　学期末試験

堀崎担当

オンライン講義の実施方法

- zoom（https://zoom.us/ ）を用いる。設定方法等については ポータルサイト（ https://utelecon.github.io/oc/ ）を参照すること。
- 講義のURLは前半・後半それぞれで毎回同じにする予定。後半(6/4)からはURLが変更となるので必ずITC-LMSを確認すること。
- 質問がある場合は，チャットに書き込む，あるいはミュートをオフにして音声で質問する，のいずれかの方法で行うこと。
- もしオンラインでの受講に不都合が生じた場合は，メール等で連絡すること。

shoichi_koyama@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

horisaki@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

講義資料と成績評価

- 講義資料・動画
  - ITC-LMSにアップロード
  - 資料はできるだけ講義前日までにアップロードするようにします。

- 成績評価
  - 学期末試験（暫定）
  - 第7回（5/21）に小テストを実施する可能性あり

本日の目次

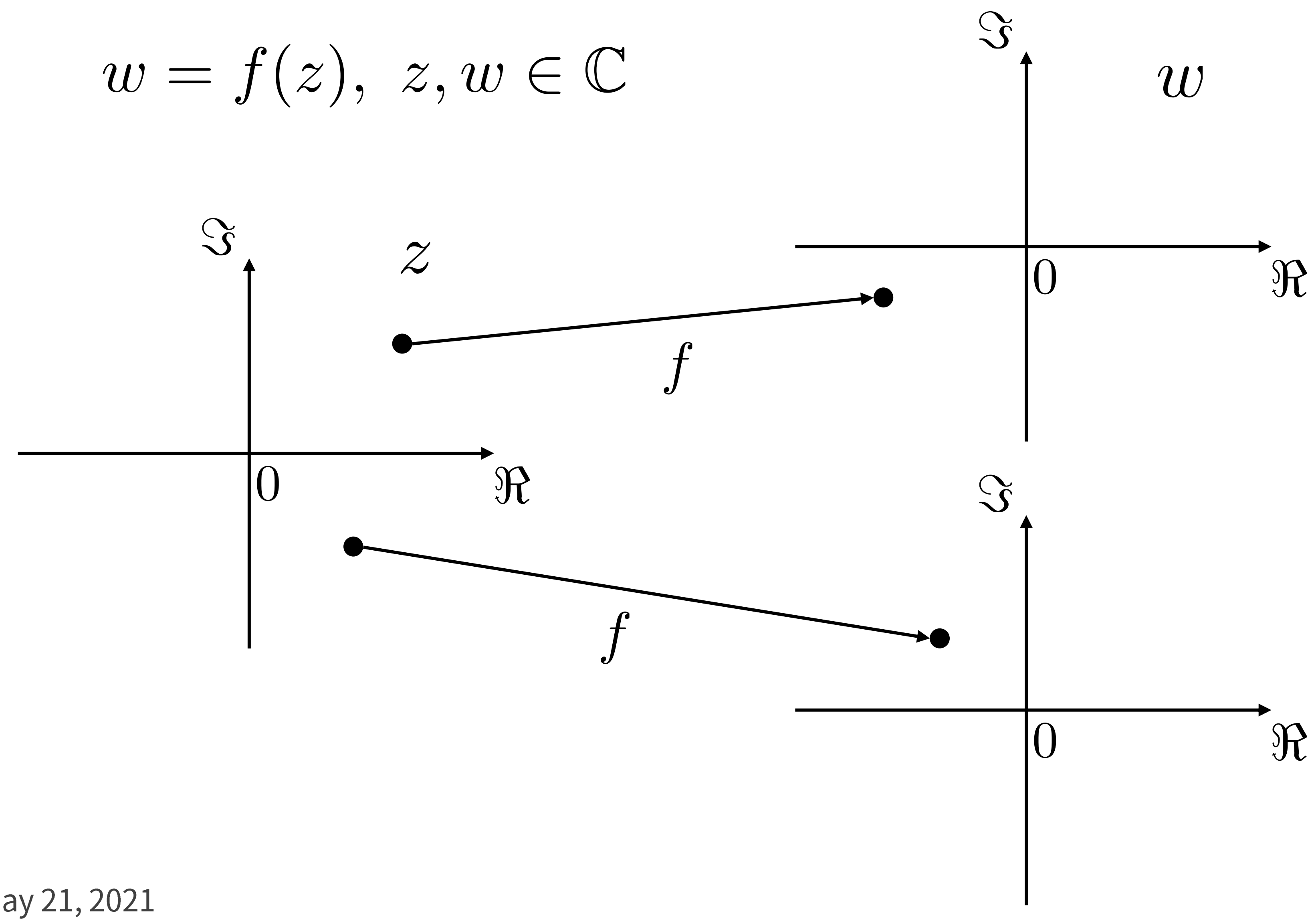
1. 信号処理のための複素関数論

信号処理のための複素関数論

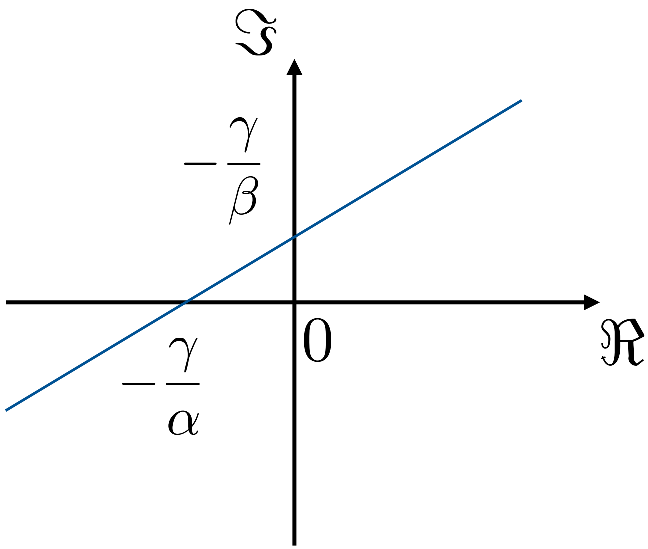
複素関数

- 定義域 z と値域 w どちらも複素数の関数 f

$$w = f(z),\ \ z, w \in \mathbb{C}$$



- 直線の方程式



xy 平面上では，$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ を用いて，

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

z平面上では，$z = x + \mathrm{j}y$ より，

$$\begin{cases} x = \dfrac{z + z^*}{2} & \text{（実軸）} \\ y = \dfrac{z - z^*}{2\mathrm{j}} & \text{（虚軸）} \end{cases}$$

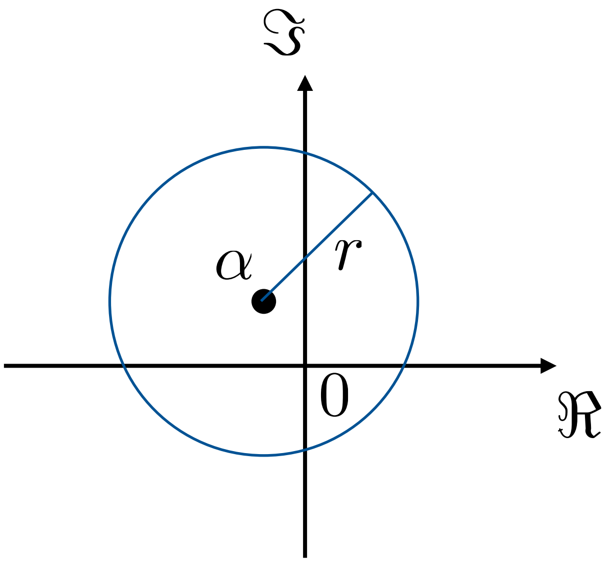
$$\alpha \frac{z + z^*}{2} + \beta \frac{z - z^*}{2\mathrm{j}} + \gamma = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha - \beta\mathrm{j}}{2} z + \frac{\alpha + \beta\mathrm{j}}{2} z^* + \gamma = 0$$

となるので，以下のような形になる

$$b^* z + b z^* + c = 0$$

- 円の方程式



$\alpha \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}$ を用いて，

$$|z - \alpha| = r$$

$$(z-\alpha)(z-\alpha)^* = r^2$$
$$\Rightarrow |z|^2 - \alpha^* z - \alpha z^* + |\alpha|^2 - r^2 = 0$$

直線と円

➢ 直線と円の方程式の一般形

$$a|z|^2 - b^* z - b z^* + c = 0$$

$$(a, c \in \mathbb{R},\ \ |b|^2 \geq ac)$$

– 直線：　$a = 0$

– 円：　$a \neq 0$

– 直線は無限遠点を通る円と考える

複素一次変換（Möbius変換）

- 複素平面上での１次分数関数を用いた変換

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad (ad-bc \neq 0)$$

- なぜ一次変換？

$$\begin{aligned} w &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{(bc-ad)/c^2}{z+d/c} + \frac{a}{c} \end{aligned}$$

3つの基本的な変換の組み合わせ

1) $z_1 = z + \dfrac{d}{c}$ 平行移動

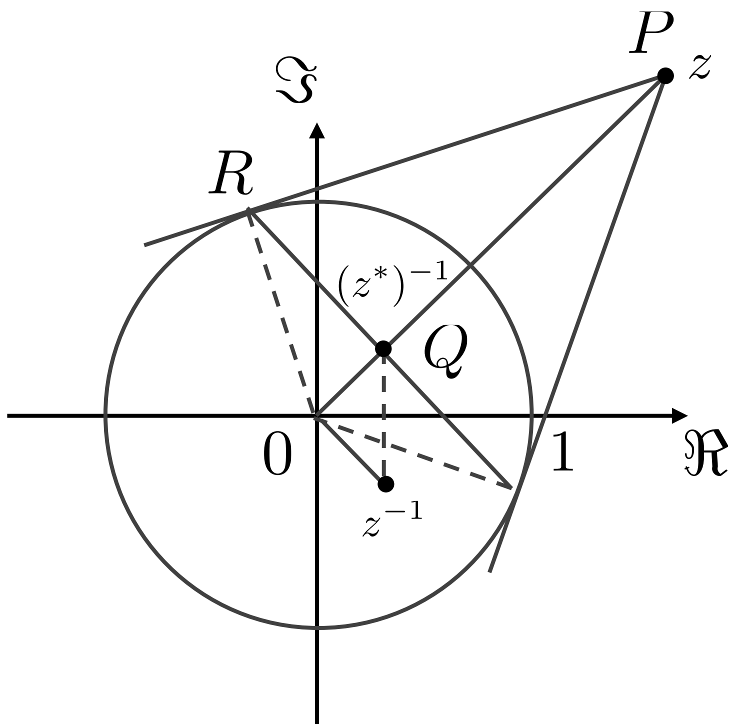
2) $z_2 = \dfrac{1}{z_1}$ 反転

3) $z_3 = \dfrac{bc-ad}{c^2} z_2$ 拡大縮小・回転

4) $w = z_3 + \dfrac{a}{c}$ 平行移動

複素一次変換（Möbius変換）

➢ 3つの変換のうち反転について，



$\triangle ORQ$ と $\triangle OPR$ が相似であるから，

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} \quad \Rightarrow \quad \overline{OQ} \cdot \overline{OP} = 1$$

$\overline{OR} = 1$

$z \to z^{-1}$ は，単位円に対する鏡像位置に移し，さらに実軸に対称位置に移す

複素一次変換（Möbius変換）

➢ 直線または円の方程式の反転は，

$$|z|^2 - \alpha^* z - \alpha z^* + |\alpha|^2 - r^2 = 0$$

$$\Big\Downarrow \; z \to z^{-1}$$

$$|z^{-1}|^2 - \alpha^* z^{-1} - \alpha (z^{-1})^* + |\alpha|^2 - r^2 = 0$$

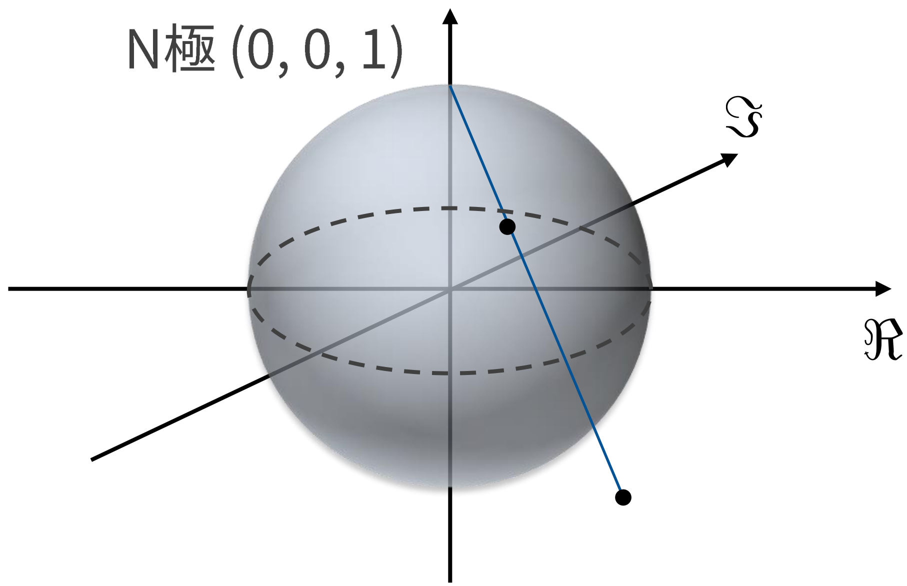
$$\Rightarrow (|\alpha|^2 - r^2)|z|^2 - \alpha^* z^* - \alpha z + 1 = 0$$

直線または円の方程式

- （平行移動・拡大縮小・回転も含めた）複素一次変換は，円を円に写す（円-円対応）
  - 直線→円や円→直線も含む，Riemann球面上で考えてもよい
- 複素一次変換は等角写像（２つの曲線のなす角が保存される）

Riemann球面

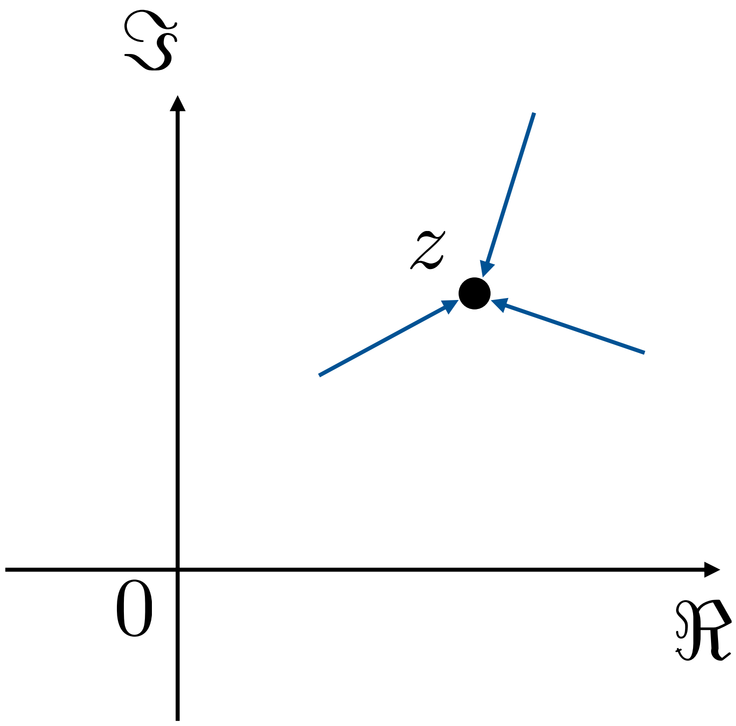
- Riemann球面：3次元空間において，z平面の原点を中心とする半径1の球を考える。
- 立体射影：z平面上の点を，その点とRiemann球面のN極とを結ぶ直線がRiemann球面と交わる点に写す1対1の射影
  - N極は複素平面における無限遠に対応し，$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を拡張複素平面と呼ぶ
  - S極は原点，赤道は単位円に対応
  - z平面上の円（直線含む）は，Riemann球面上でも円となる



複素関数の微分

- 実関数の微分と定義は同じだが，どこから近づいても同じ極限に収束しなければならない

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$



Cauchy-Riemannの関係式

- 複素関数 $w=f(z)$ が領域 D で微分可能であるとき，w は領域 D で正則（あるいは解析的）であるという。
  ➡ w が領域 D で正則であるための必要十分条件

- $w=u(x,y)+\mathrm{j}v(x,y),\ \ z=x+\mathrm{j}y$
  - 微小量 Δz に対する関数値の変化 $\Delta f(z)=f(z+\Delta z)-f(z)$

$$\begin{aligned}\Delta f &= \Delta u+\mathrm{j}\Delta v\\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\mathrm{j}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)\\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{j}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y\end{aligned}$$

  - $\Delta x,\Delta y$ に非依存となるには，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

：Cauchy-Riemannの関係式

複素関数の微分

- 正則な関数の例

$$z^n,\ \ z^{-n},\ \ \sin z,\ \ \cos z,\ \ \exp z,\ \ \log z$$

➡ 実関数と同じように微分すればよい $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^n = n z^{n-1}$

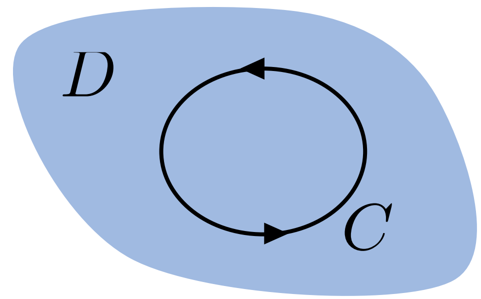
- （意外に）正則でない関数の例

$$z^*$$

– 複素関数を z と z^* の２変数関数と見たとき，正則な関数は z だけの関数になっている

➢ 領域 D で正則な複素関数 $f(z)$ について，領域 D に含まれる単一閉曲線 C での $f(z)$ の周回積分は0となる。

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$



Proof:

$$\begin{aligned}
\oint_C f(z)\mathrm{d}z &= \oint_C (u+\mathrm{j}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{j}\mathrm{d}y) \\
&= \oint_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + \mathrm{j}\oint_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) \\
&= -\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{j}\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 0
\end{aligned}$$

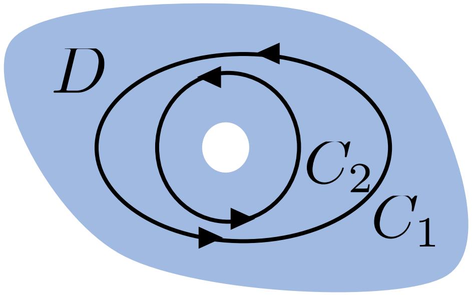
Greenの定理

Cauchy-Riemannの関係式

Cauchyの積分定理

- 非正則な領域を一つ含む場合，複素積分は自明に0とはならないが，積分値は積分路の選び方によらない。

$$\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$$



  - 正則でない点を特異点と呼ぶ
  - ある特異点を中心とする十分小さい円を描いたとき，その内部にそれ以外の特異点がないとき，孤立特異点と呼ぶ

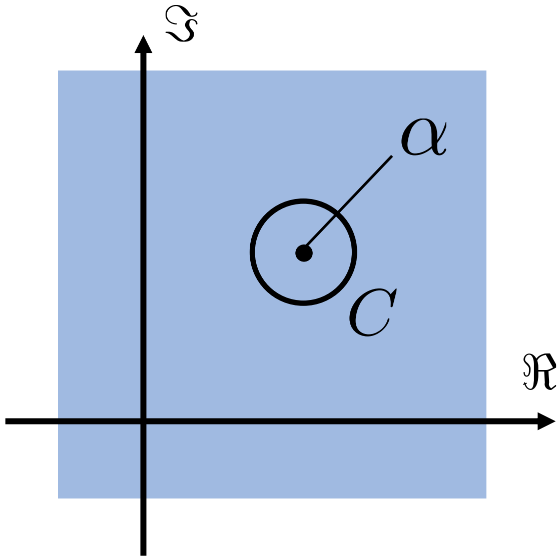
Cauchyの積分定理

- 例：$z=\alpha$ にのみ特異点を持つ関数の複素積分

$$\oint_C \frac{1}{(z-\alpha)^n}\mathrm{d}z$$

  - 積分路 C： $z=\alpha+r\exp(\mathrm{j}\theta),\ \theta\in[0,2\pi)$ とする。

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{1}{(z-\alpha)^n}\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\frac{r\mathrm{j}\exp(\mathrm{j}\theta)\mathrm{d}\theta}{(\alpha+r\exp(\mathrm{j}\theta)-\alpha)^n}\\ &= \frac{\mathrm{j}}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}\exp\left(-\mathrm{j}(n-1)\theta\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \begin{cases}0, & n\neq 1\\ 2\pi\mathrm{j}, & n=1\end{cases}\end{aligned}$$



Cauchyの積分公式

- 複素関数$f(z)$が閉経路C内において正則であるとき，C内部の点$\alpha \in \mathbb{C}$について，

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha} \mathrm{d}z$$

Proof:

$C: \ z = \alpha + r\exp(\mathrm{j}\theta), \ \theta \in [0, 2\pi)$ として，

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha + r\exp(\mathrm{j}\theta))}{\cancel{\alpha} + \cancel{r\exp(\mathrm{j}\theta)} - \cancel{\alpha}} \cdot \mathrm{j}\cancel{r\exp(\mathrm{j}\theta)}\mathrm{d}\theta$$

$$= \mathrm{j}\int_0^{2\pi} f(\alpha + r\exp(\mathrm{j}\theta))\mathrm{d}\theta$$

$r \to +0$ の極限を取れば，

$$\mathrm{j}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{j}f(\alpha)$$

Laurent級数展開

- 点 α 周りのTaylor級数展開
  - 実関数の場合

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n, \ a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

  - 複素関数の場合

Goursatの定理

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n, \ a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

- 複素関数 $f(z)$ の点 α 周りのLaurent級数展開

$$f(z) = \sum_{\boxed{n=-\infty}}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n, \ a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

  - α が孤立特異点のときのみLaurent級数に負のべきの項が生じる。

- $f(z)$の孤立特異点$z=\alpha$における留数の定義

$$\mathrm{Res}(\alpha) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C f(z) \mathrm{d}z$$

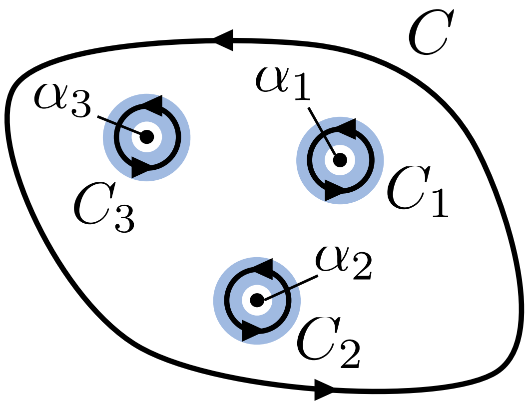
  - Laurent級数展開との関係

$$\mathrm{Res}(\alpha) = a_{-1}$$

留数はn=−1の項の係数に対応

- 留数定理：留数が複数個存在

$$\oint_C f(z) \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{j} \sum_k \mathrm{Res}(\alpha_k)$$



参考文献

1. 眞溪歩, "ディジタル信号処理工学," 昭晃堂, 2004.
2. M. Vetterli, J. Kovačević, and V. K. Goyal, "Foundations of Signal Processing," Cambridge University Press, 2014.
3. 藤原毅夫, “東京大学工学教程 複素関数論I,” 丸善出版, 2013.