

信号処理論第一：第3回

信号の展開表現・Fourier級数展開

東京大学 大学院情報理工学系研究科 システム情報学専攻

小山 翔一

講義の目的と概要

➤ 講義の目的

- 信号処理の基礎を習得する。

➤ 講義の概要

- 決定論的信号（確定的信号）に関する信号処理について、基礎事項を理解する。本講義では、できるだけ特定の応用分野に限らない、一般的な信号処理論について講義する。ただし、統計的信号処理については扱わず、信号処理論第二の範囲となる。

➤ キーワード

- Fourier級数, Fourier変換, 離散時間Fourier変換, 離散Fourier変換, FFT, 窓Fourier変換, 線形時不変システム, サンプリング定理, インパルス応答, 伝達関数, 周波数応答, 差分方程式, ブロック線図, 因果性, 安定性, FIRフィルタ, IIRフィルタ

講義スケジュール

➤ Sセメスター 金曜 1限 (8:30-10:15) @オンライン

➤ 日程 (暫定版)

- 4/9 第1回
 - 4/16 第2回
 - 4/23 第3回
 - 4/30 第4回
 - 5/7 第5回
 - 5/14 第6回
 - 5/21 第7回
- 小山
担当

- 5/28 休講
 - 6/4 第7回
 - 6/11 第8回
 - 6/18 第9回
 - 6/25 第10回
 - 7/2 第11回
 - 7/9 第12回
 - 7/30 学期末試験
- 堀崎
担当

オンライン講義の実施方法

- zoom (<https://zoom.us/>) を用いる。設定方法等についてはポータルサイト (<https://utelecon.github.io/oc/>) を参照すること。
- 講義のURLは前半・後半それぞれで毎回同じにする予定。後半(6/4)からはURLが変更となるので必ずITC-LMSを確認すること。
- 質問がある場合は、チャットに書き込む、あるいはミュートをオフにして音声で質問する、のいずれかの方法で行うこと。
- もしオンラインでの受講に不都合が生じた場合は、メール等で連絡すること。

shoichi_koyama@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

horisaki@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

➤ 講義資料・動画

- ITC-LMSにアップロード
- 資料はできるだけ講義前日までにアップロードするようにします。

➤ 成績評価

- 学期末試験（暫定）
- 第7回（5/21）に小テストを実施する可能性あり

本日の目次

1. 信号の展開と近似
2. Fourier級数展開

信号の展開と近似

信号の展開と近似

- 信号を時間 t の関数 $x(t)$ とする。
- $x(t)$ を関数列 $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{K-1}$ の線形結合で近似することを考える。

$$x(t) \approx \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k \varphi_k(t) \quad , \quad \alpha_k \in \mathbb{C}$$

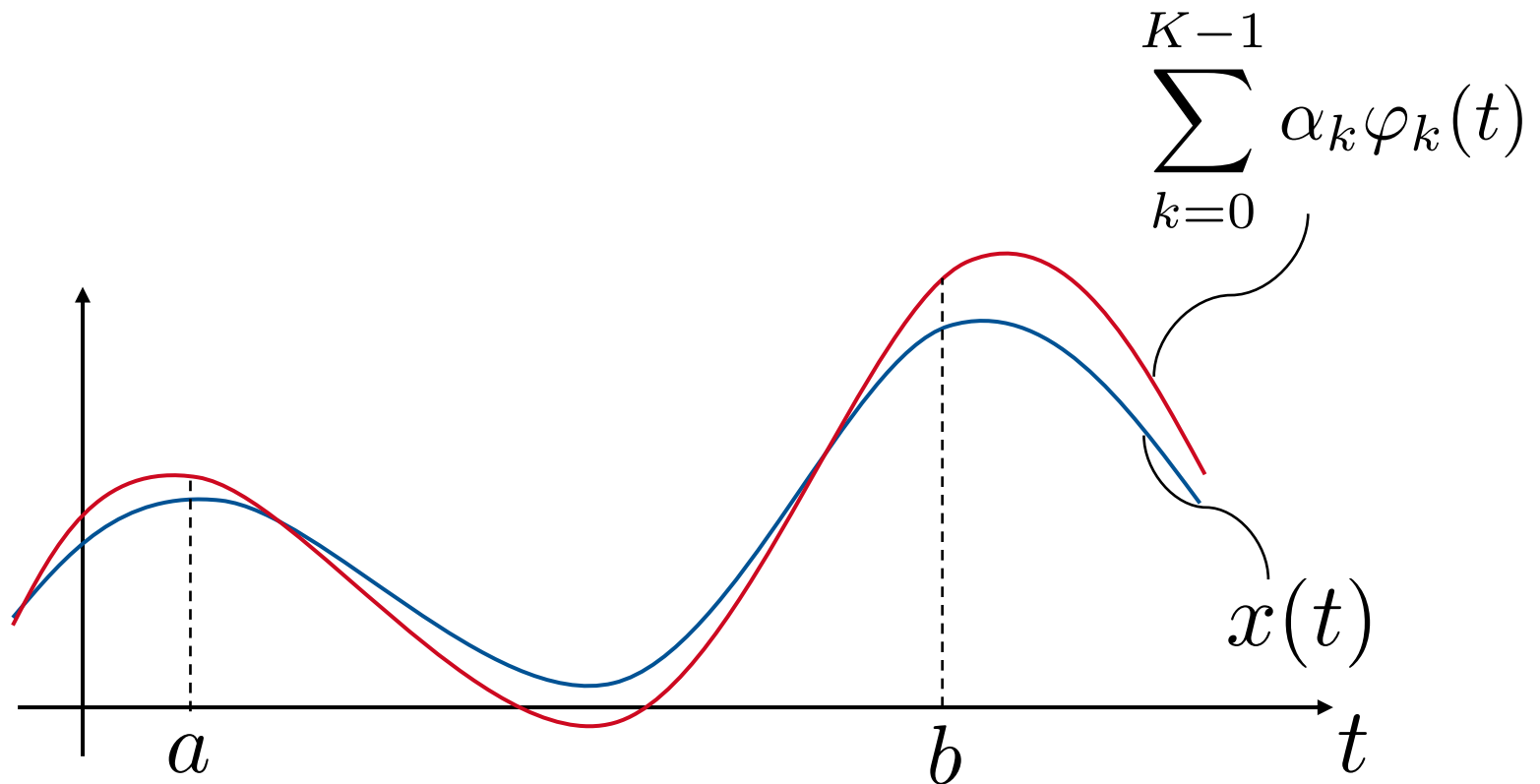
展開係数

関数列 (信号の基本要素)

- これを信号の展開表現 (signal decomposition / expansion) と呼ぶ。

信号の展開と近似

- 信号を時間 t の関数 $x(t)$ とする。
- $x(t)$ を関数列 $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{K-1}$ の線形結合で近似することを考える。



信号の展開と近似

➤ なぜ展開表現が必要なのか？

- 信号を展開表現することが、信号処理の基礎となる概念に密接に関わっているほか、様々な工学的な応用が可能となる。

➤ どのような関数で展開するか？

- 色々な関数列の取り方があり得るが、よく性質のわかかった信号の基本要素の組み合わせで近似すると、実用的に都合が良い場合が多い。

➤ 展開係数をいかに決定するか？

- 元の信号を近似したときの乖離度を計る尺度を決め、それができるだけ小さくなるように決定するのが常套手段。

基底展開

- 関数列 $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{K-1} \subset V$ によって、あらゆる信号 $x(t) \in V$ が表現でき（完全系）、以下を満たす展開係数 $(\alpha_k)_{k=0}^{K-1}$ が一意に定まるとする（線形独立）。

$$x(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k \varphi_k(t) \quad , \quad \alpha_k \in \mathbb{C}$$

このとき、 $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{K-1}$ を V の基底と呼ぶ。基底の数 K は無限としてもよい。

$(-\infty, \infty)$ などでもよい。

- 簡単のため、対象とする信号を区間 $[a, b]$ で 2 乗可積分な関数とする。

$$V = L^2([a, b]) = \left\{ x(t) \mid \int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

➡ 特異的な振る舞いをする信号は除外して考える。

内積とノルム

- $L^2([a, b])$ は、内積とノルムが以下で定義されるようなベクトル空間となる。

内積： $\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y^*(t)dt$

ノルム： $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$

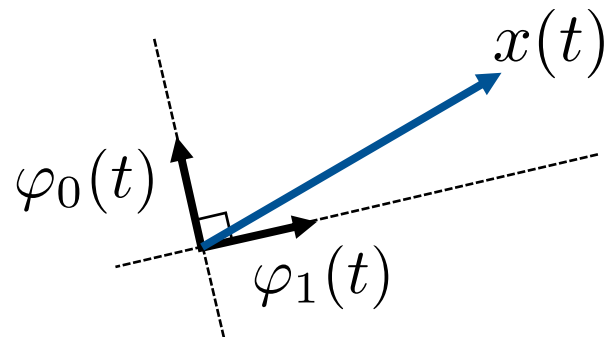
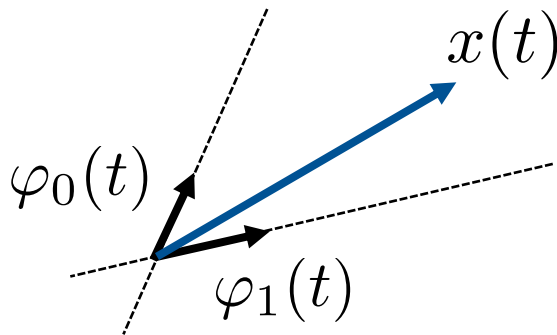
上記で定義された内積・ノルムは内積・ノルムの公理を満たすことが確かめられる。

正規直交基底

- 基底として扱いやすい性質を持つものとして、正規直交基底がよく使われる。
- 以下を満たすような関数列 $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{K-1} \subset L^2([a, b])$ を直交関数系と呼ぶ。

$$\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle = \int_a^b \varphi_i(t) \varphi_k^*(t) dt = \begin{cases} c, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

特に $c = 1$ の場合、 $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{K-1}$ を正規直交関数系と呼ぶ。



正規直交基底

➤ なぜ正規直交基底が扱いやすいのか？

➡ 一つの理由は展開係数が容易に求められるため。

➤ あらゆる $x(t) \in L^2([a, b])$ の正規直交基底 $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{K-1}$ に関する一意な展開が、以下で与えられる。

$$x(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k(t)$$

展開係数 $(\alpha_k)_{k=0}^{K-1}$ が、信号と基底関数との内積として得られる。

$$\alpha_k = \langle x, \varphi_k \rangle$$

正規直交基底

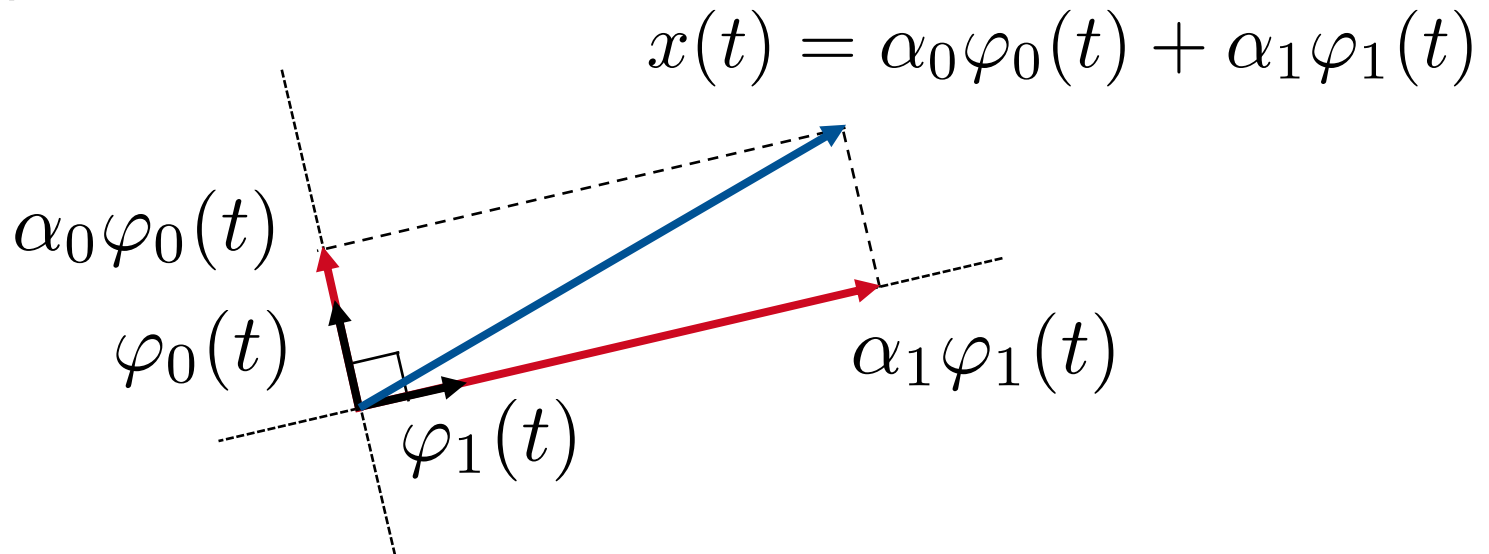
➤ 証明

$$\langle x, \varphi_k \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i \varphi_i, \varphi_k \right\rangle = \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle = \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i \delta_{i-k} = \alpha_k$$

内積の線形性

正規直交性

➤ 幾何的なイメージ



Parsevalの等式

- 正規直交展開は，信号 $x(t)$ と展開係数 $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_0, \dots, \alpha_{K-1}]^T$ に関して以下のParseval (パーセバル) の等式が成り立つ。

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{K-1} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2$$

- また，信号 $y(t)$ とその展開係数 $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0, \dots, \beta_{K-1}]^T$ を新たに定義すれば，以下の一般化Parsevalの定理を満たす。

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{K-1} \langle x, \varphi_k \rangle \langle y, \varphi_k \rangle^* = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$$

Parsevalの等式

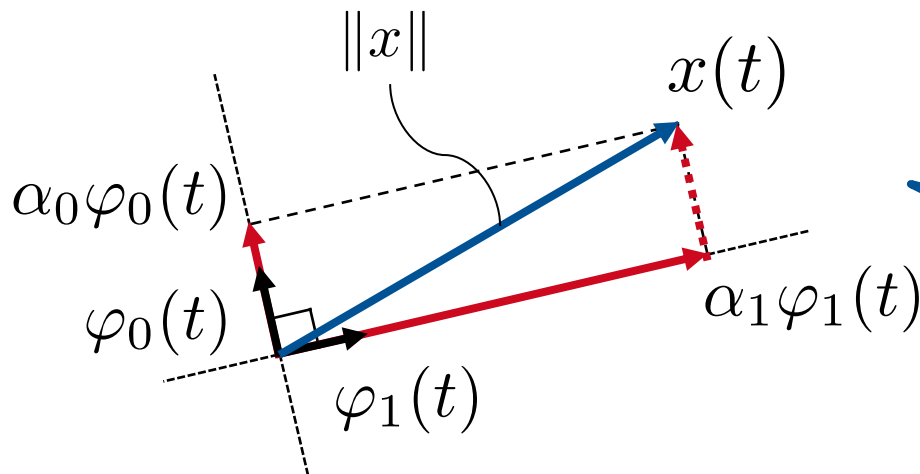
➤ 一般化Parsevalの等式の証明

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{K-1} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k, y \right\rangle = \sum_{k=0}^{K-1} \langle x, \varphi_k \rangle \langle \varphi_k, y \rangle = \sum_{k=0}^{K-1} \langle x, \varphi_k \rangle \langle y, \varphi_k \rangle^*$$

内積の線形性

内積のHermite対称性

➤ 幾何的なイメージ (Parsevalの等式)



$$|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = \|x\|^2$$

➡ ピタゴラスの定理

最小2乗近似

- 正規直交基底による信号の展開表現において、基底の部分集合のみを用いることを考える。
- 全体の基底 $\mathcal{K} = \{0, \dots, K-1\}$ のうち、部分集合 $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}$ の関数列 $\{\varphi_k(t)\}_{k \in \mathcal{I}}$ のみを用いるとする。
- 例えば、基底が完全性を持つには無限個の関数列が必要だが、計算上打ち切る必要がある場合など。

$$x_{\mathcal{I}}(t) = \sum_{k \in \mathcal{I}} \alpha_k \varphi_k(t)$$

- これにより、信号 $x(t)$ を近似することを考える。

$$x(t) \approx x_{\mathcal{I}}(t)$$

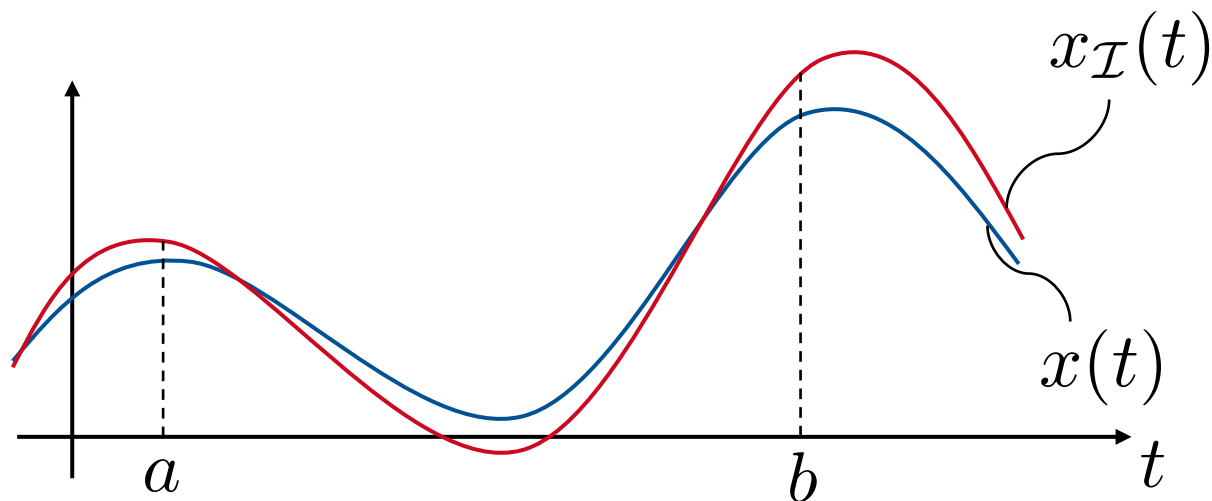
最小2乗近似

- 2乗誤差が最小になるように展開係数を決めることを考える。

$$\underset{(\alpha_k)_{k \in \mathcal{I}}}{\text{minimize}} \left\| x(t) - \sum_{k \in \mathcal{I}} \alpha_k \varphi_k(t) \right\|^2$$

- 結果から言うと、展開係数は信号と基底関数の内積となる。

$$\alpha_k = \langle x, \varphi_k \rangle$$



最小2乗近似

- 準備として以下を証明する。任意の $\{\varphi_l(t)\}_{l \in \mathcal{I}}$ に対して、

$$x(t) - \sum_{k \in \mathcal{I}} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k(t) \perp \varphi_l(t)$$

が成り立つ。

- 証明

内積の分配律

$$\begin{aligned} \left\langle x(t) - \sum_{k \in \mathcal{I}} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k(t), \varphi_l(t) \right\rangle &= \langle x(t), \varphi_l(t) \rangle - \left\langle \sum_{k \in \mathcal{I}} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k(t), \varphi_l(t) \right\rangle \\ &= \langle x(t), \varphi_l(t) \rangle - \sum_{k \in \mathcal{I}} \langle x, \varphi_k \rangle \delta_{k-l} \\ &= \langle x(t), \varphi_l(t) \rangle - \langle x(t), \varphi_l(t) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

内積の線形性

最小2乗近似

➤ ピタゴラスの定理では、 $x \perp y$ のとき、以下が成り立つ。

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

➤ 2乗誤差関数を以下のように変形する。

$$\begin{aligned} & \left\| x(t) - \sum_{k \in \mathcal{I}} \alpha_k \varphi_k(t) \right\|^2 \\ &= \left\| \left(x(t) - \sum_{k \in \mathcal{I}} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k(t) \right) + \left(\sum_{k \in \mathcal{I}} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k(t) - \sum_{k \in \mathcal{I}} \alpha_k \varphi_k(t) \right) \right\|^2 \end{aligned}$$

- 第2項は基底 $\{\varphi_k(t)\}_{k \in \mathcal{I}}$ の線形結合となっている。
- 前スライドの結果から、第1項と第2項は直交する。
- ピタゴラスの定理を適用可能。

最小2乗近似

➤ さらに変形すると,

$$\left\| x(t) - \sum_{k \in \mathcal{I}} \alpha_k \varphi_k(t) \right\|^2$$

ピタゴラスの定理

$$= \left\| x(t) - \sum_{k \in \mathcal{I}} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k(t) \right\|^2 + \left\| \sum_{k \in \mathcal{I}} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k(t) - \sum_{k \in \mathcal{I}} \alpha_k \varphi_k(t) \right\|^2$$

$$= \left\| x(t) - \sum_{k \in \mathcal{I}} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k(t) \right\|^2 + \left\| \sum_{k \in \mathcal{I}} (\langle x, \varphi_k \rangle - \alpha_k) \varphi_k(t) \right\|^2$$

$$= \left\| x(t) - \sum_{k \in \mathcal{I}} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k(t) \right\|^2 + \sum_{k \in \mathcal{I}} |\langle x, \varphi_k \rangle - \alpha_k|^2$$

ノルムの斉次性

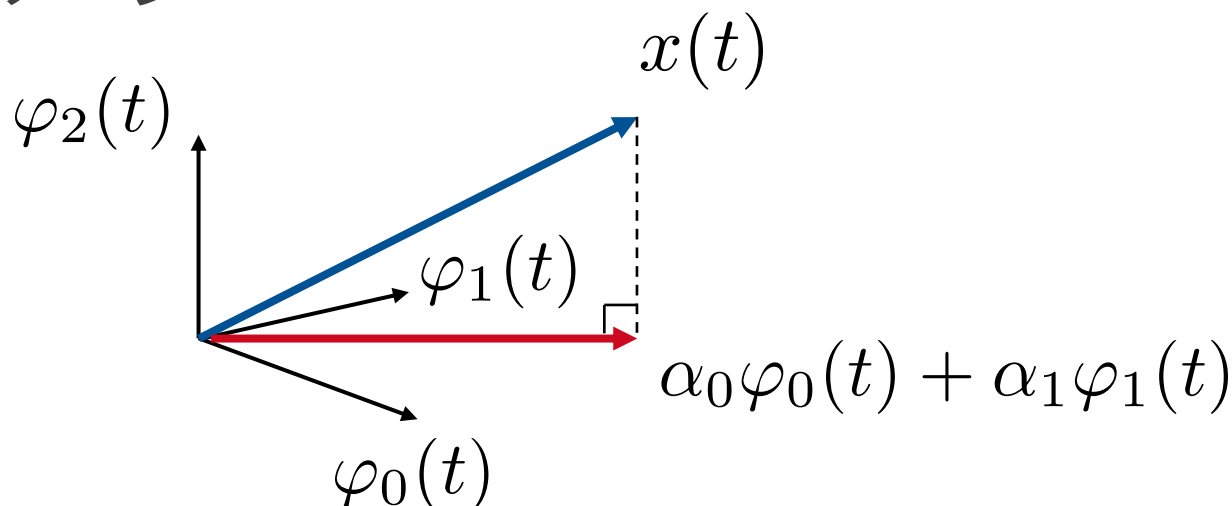
➤ これを最小化するには, $\alpha_k = \langle x, \varphi_k \rangle$ とすればよい。

最小2乗近似

- 基底とする関数列が完全でない場合でも、以下のような展開が信号の最小2乗近似を与える。

$$x(t) \approx \sum_{k \in \mathcal{I}} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k(t)$$

- 幾何的なイメージ



➡ 最小2乗近似は、 $\{\varphi_k(t)\}_{k \in \mathcal{I}}$ による部分空間への $x(t)$ の直交射影に他ならない。

最小2乗近似

- 正規直交な関数列 $\{\varphi_k(t)\}_{k \in \mathcal{I}}$ に対して，以下のBesselの不等式が成り立つ。

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k \in \mathcal{I}} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2$$

$\{\varphi_k(t)\}_{k \in \mathcal{I}}$ が完全な場合 ($\mathcal{I} = \mathcal{K} = \{0, \dots, K-1\}$) に等号成立 ➡ Parsevalの等式に一致

- 証明

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| \sum_{k \in \mathcal{I}} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k(t) \right\|^2 + \left\| x(t) - \sum_{k \in \mathcal{I}} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k(t) \right\|^2 \\ &\geq \left\| \sum_{k \in \mathcal{I}} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k(t) \right\|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathcal{I}} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

ピタゴラスの定理

ノルムの斉次性

どのような正規直交基底を使う？

➤ 三角関数

➤ 複素指数関数

➤ 球面調和関数

➤ Bessel関数

➤ Hermite多項式

➤ Chebyshev多項式

➤ Walsh関数

➤ etc...

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

⇕ 等価

$$\left\{ \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

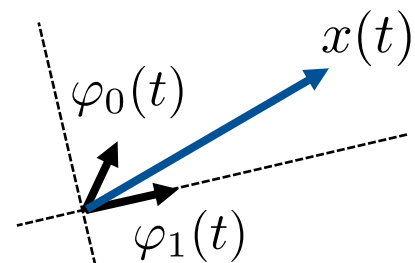
※ T は関数の周期

正規直交基底が本当に良いのか？



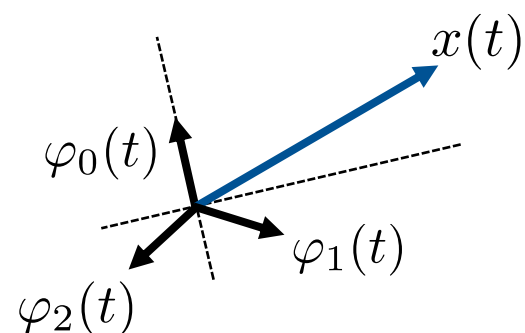
➤ 非直交な関数系に展開してもいいのでは？

➡ 双直交展開



➤ 線形従属な関数系に展開してもいいのでは？

➡ フレーム展開



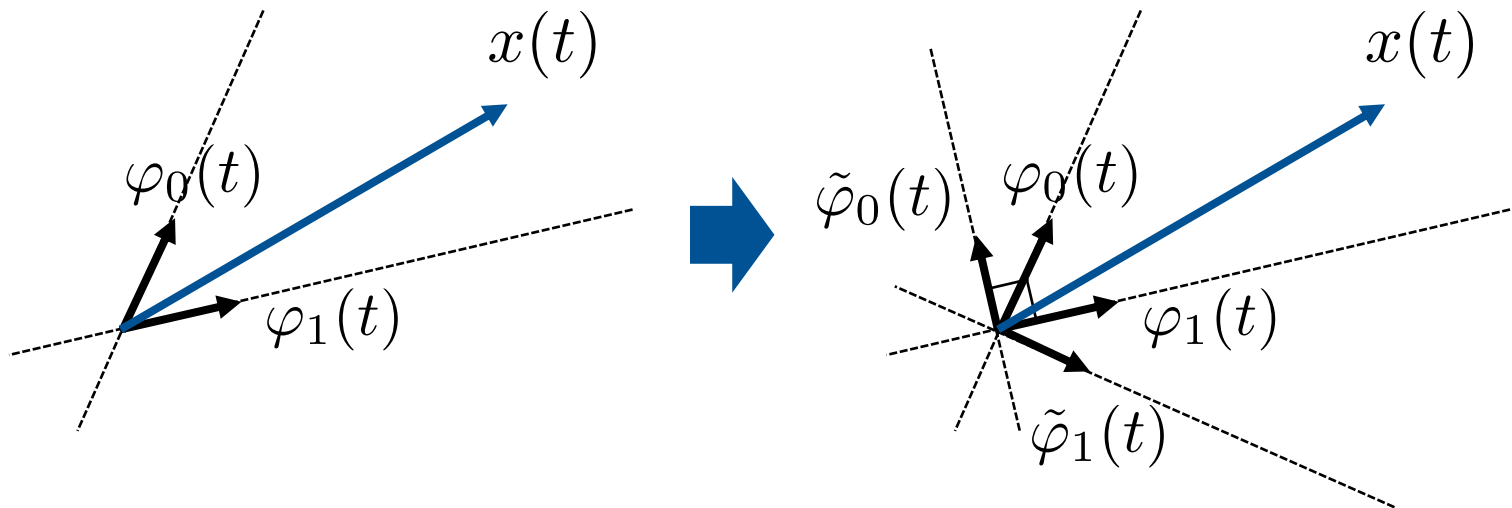
応用によってはこのような正規直交基底以外の関数系を用いた展開が利点を持つ場合もある。

双直交展開



- 信号を非直交基底に展開する場合，**双直交基底対 (biorthogonal pair of bases)** を考える。
- 関数列 $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{K-1}$ と $\{\tilde{\varphi}_k(t)\}_{k=0}^{K-1}$ が $L^2([a, b])$ の基底となっており，以下を満たすとき，これらを双直交基底対と呼ぶ。

$$\langle \varphi_i, \tilde{\varphi}_k \rangle = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$



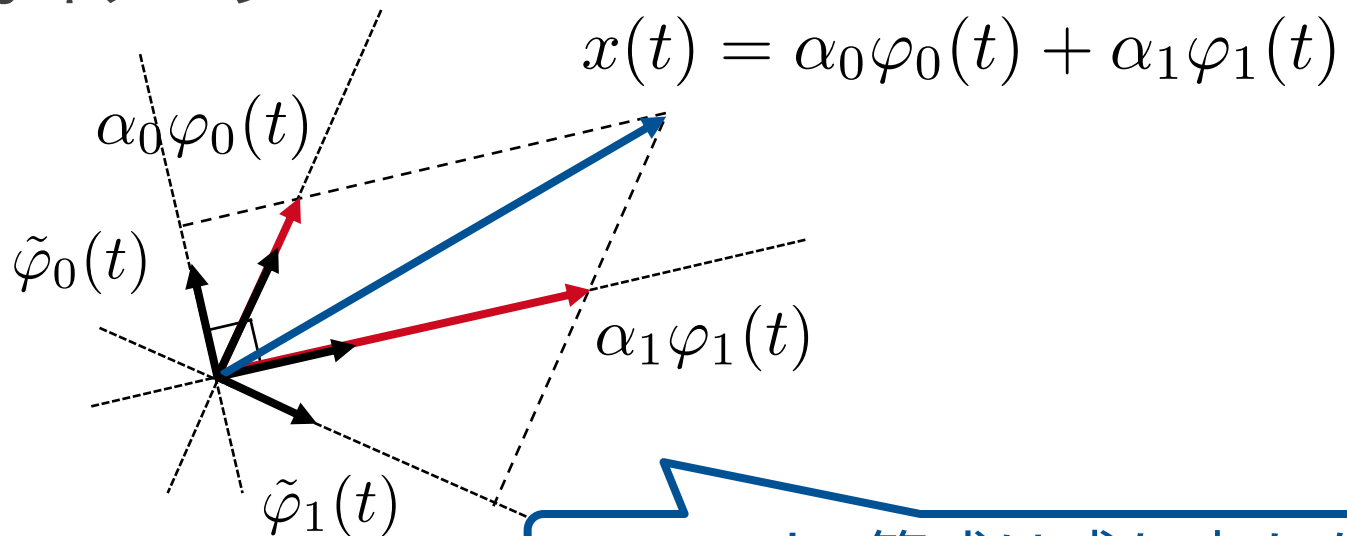
双直交展開



- あらゆる $x(t) \in L^2([a, b])$ の双直交基底対 $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{K-1}$ および $\{\tilde{\varphi}_k(t)\}_{k=0}^{K-1}$ に関する一意な展開が以下で与えられる。

$$x(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k \varphi_k(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \langle x, \tilde{\varphi}_k \rangle \varphi_k(t)$$

- 幾何的なイメージ

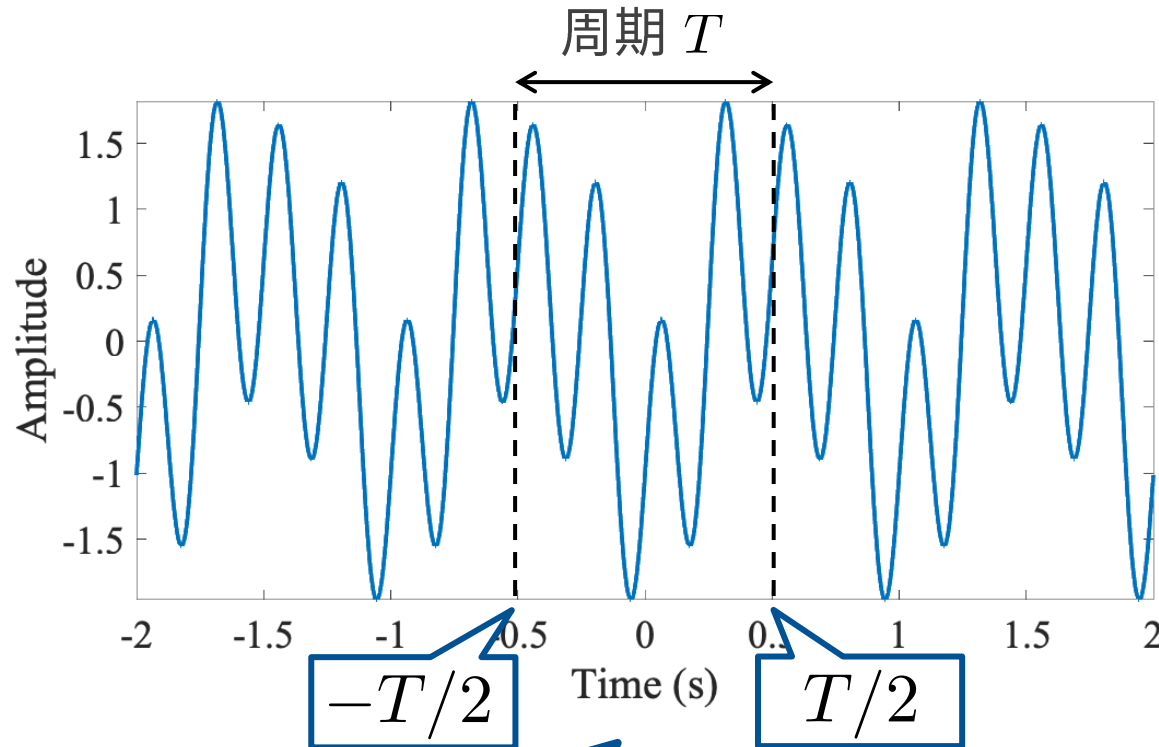


Parsevalの等式は成り立たない

FOURIER級数展開

Fourier級数展開

- 周期関数 $x(t) \in L^2([-T/2, T/2))$ の三角関数あるいは指数関数を基底として用いた展開表現



区間の取り方は任意性があることに注意

三角関数を用いたFourier級数展開

➤ 基底として三角関数を用いた周期関数の展開表現

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

正規化の係数がかかる

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{T} \langle x, 1 \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \\ a_k = \frac{2}{T} \left\langle x(t), \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right\rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \\ b_k = \frac{2}{T} \left\langle x(t), \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right\rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \end{array} \right.$$

三角関数を用いたFourier級数展開

- 先程の定義では直交系ではあるが正規化されていない。正規直交系とするには，以下のように定義する。

$$x(t) = a_0 \sqrt{\frac{1}{T}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

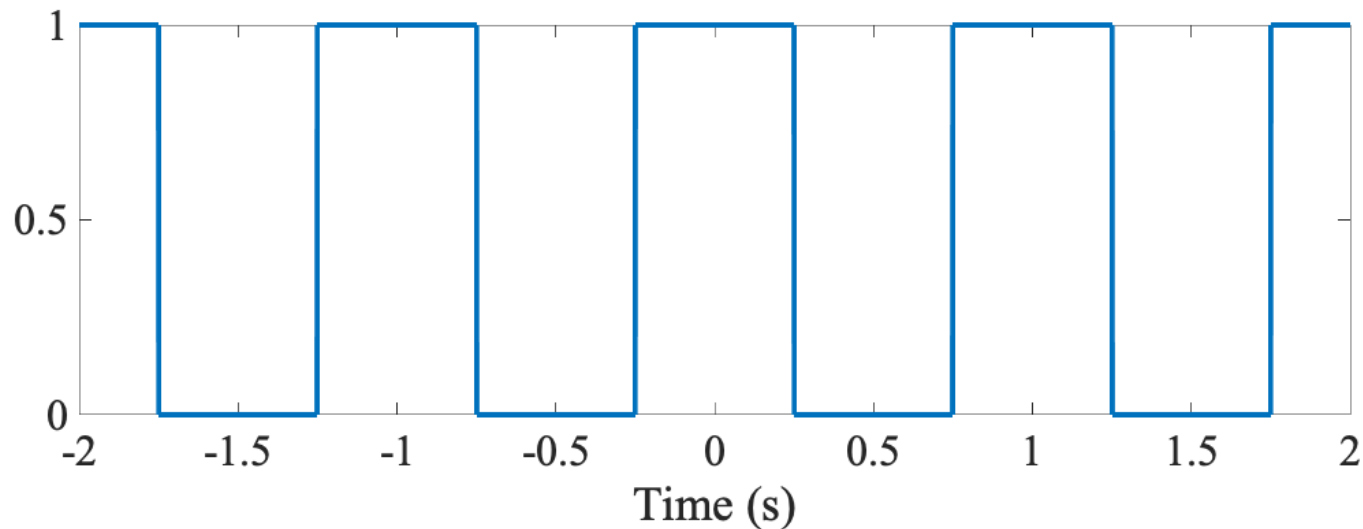
$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \left\langle x, \sqrt{\frac{1}{T}} \right\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sqrt{\frac{1}{T}} dt \\ a_k = \left\langle x(t), \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \\ b_k = \left\langle x(t), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \end{array} \right.$$

前スライドの定義が慣習としてよく使われるため，本講義でもそちらを用いる。

具体例 1 : 偶関数の場合

➤ 矩形波

$$x(t) = \begin{cases} 1, & (p - \frac{1}{4})T \leq t \leq (p + \frac{1}{4})T \quad (p \in \mathbb{Z}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



具体例 1 : 偶関数の場合

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} 1 dt = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \\ &= \frac{2}{T} \frac{T}{2\pi k} \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \Big|_{-T/4}^{T/4} = \frac{2}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \end{aligned}$$

偶関数はcos関数のみで展開

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt = 0$$

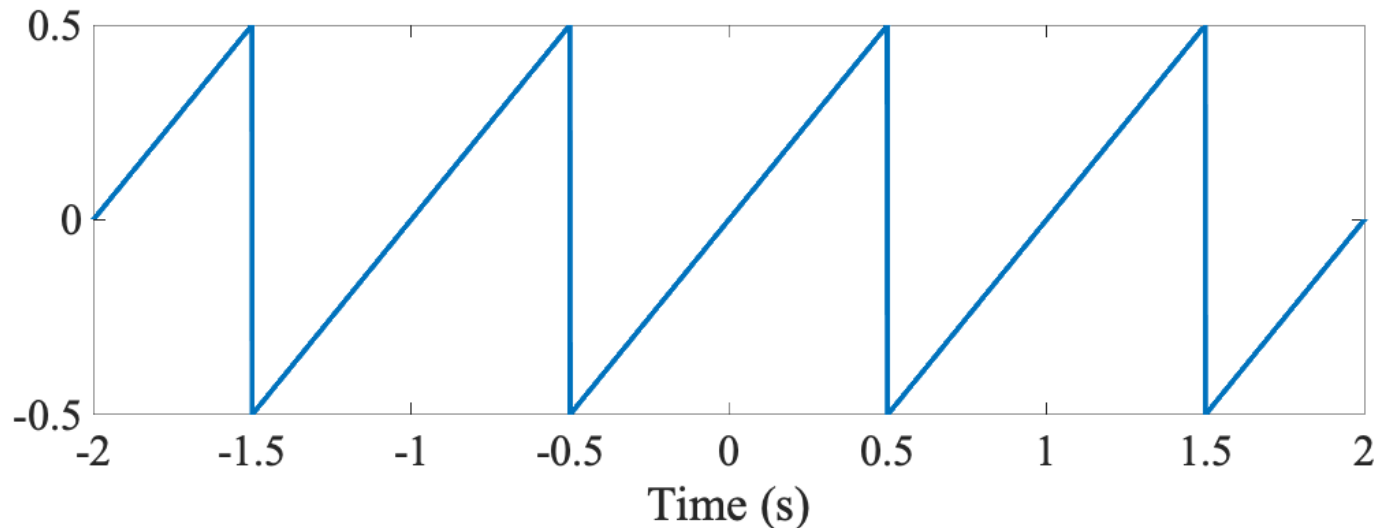


$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{6\pi t}{T}\right) + \dots \end{aligned}$$

具体例 2 : 奇関数の場合

➤ ノコギリ波

$$x(t) = \begin{cases} t - p, & (p - \frac{1}{2})T \leq t \leq (p + \frac{1}{2})T \quad (p \in \mathbb{Z}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



具体例 2 : 奇関数の場合

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} t dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} t \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt = 0$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} t \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \\ &= \frac{2}{T} \left\{ -\frac{T}{2\pi k} t \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{T}{2\pi k} \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \right\} \\ &= -\frac{T}{\pi k} \cos(\pi k) \end{aligned}$$

奇関数はsin関数のみで展開

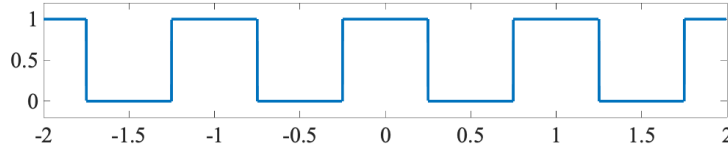


$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -\frac{T}{\pi k} \cos(\pi k) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right\} \\ &= \frac{T}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \frac{T}{2\pi} \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + \dots \end{aligned}$$

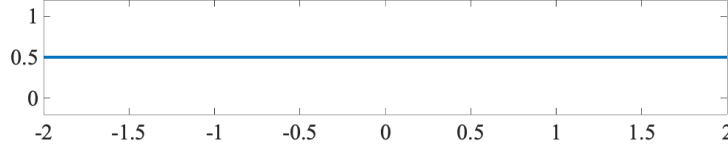
具体例 1, 2 の収束の様子

矩形波

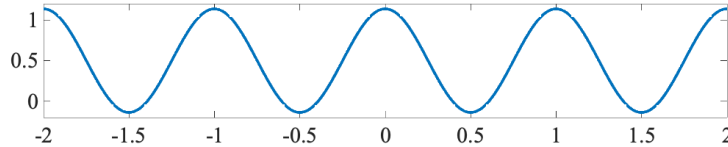
$x(t)$



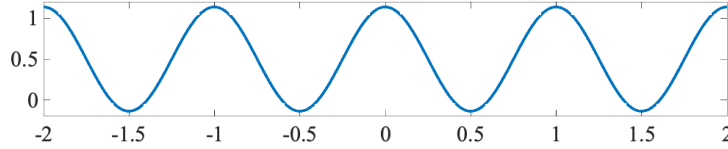
$N = 0$



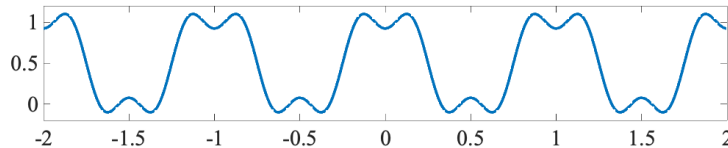
$N = 1$



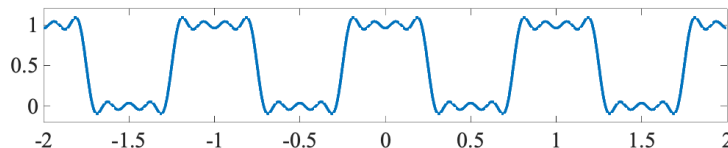
$N = 2$



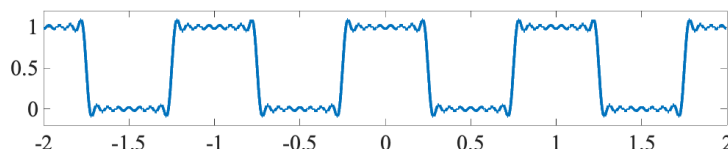
$N = 3$



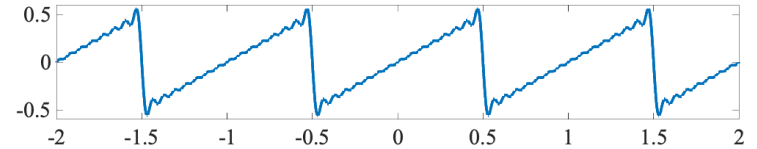
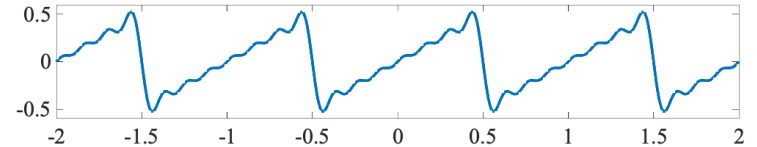
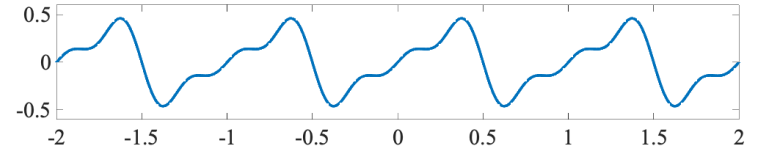
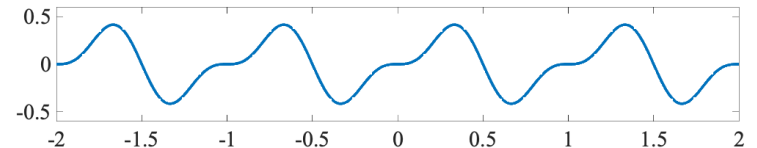
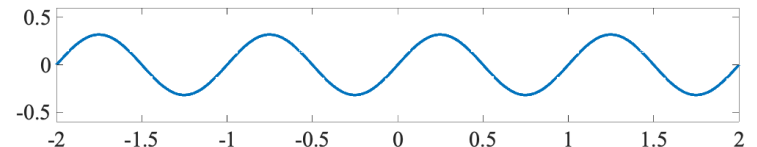
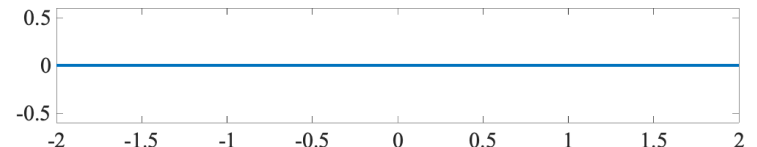
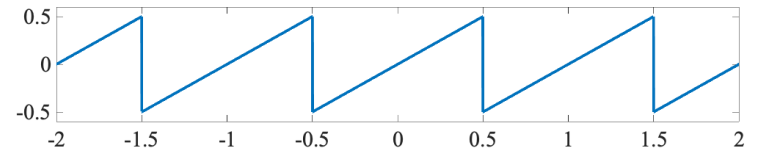
$N = 7$



$N = 15$



ノコギリ波



複素指数関数を用いたFourier級数展開

- Eulerの公式を利用し、複素指数関数による表現としたFourier級数展開の定義。

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \left\langle x(t), \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left(-j\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \end{aligned}$$

複素指数関数を用いたFourier級数展開

➤ 正規直交基底とする場合の定義。

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\left(j \frac{2\pi kt}{T}\right)$$

$$\begin{aligned} c_k &= \left\langle x(t), \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\left(j \frac{2\pi kt}{T}\right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\left(-j \frac{2\pi kt}{T}\right) dt \end{aligned}$$

こちらも前スライドの定義が慣習としてよく使われる。

複素指数関数を用いたFourier級数展開

➤ 三角関数を用いた場合と一致することを示すと、

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right\} \\
 &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \frac{\exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right) + \exp\left(-j\frac{2\pi kt}{T}\right)}{2} + b_k \frac{\exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right) - \exp\left(-j\frac{2\pi kt}{T}\right)}{2j} \right\} \\
 &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_k - jb_k}{2} \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right) + \frac{a_k + jb_k}{2} \exp\left(-j\frac{2\pi kt}{T}\right) \right\} \\
 &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - jb_k}{2} \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right) + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{a_{-k} + jb_{-k}}{2} \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right) \\
 &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - jb_k}{2} \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right) + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{a_k - jb_k}{2} \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right) \\
 &= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right) + \sum_{k=-\infty}^{-1} \gamma_k \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right)
 \end{aligned}$$

最後の項で
 k の符号
を反転

係数の性質

$$\gamma_k = \begin{cases} a_0, & k = 0 \\ \frac{a_k - jb_k}{2}, & k \neq 0 \end{cases}$$

複素指数関数を用いたFourier級数展開

➤ 係数 γ_k は指数関数を用いた場合の係数 c_k と一致する。

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= a_0 \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \\ &= c_0\end{aligned}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt$$

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \frac{a_k - jb_k}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \left\{ \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right\} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left(-j\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \\ &= c_k\end{aligned}$$

正規直交基底としてのFourier級数展開

- Fourier級数展開は，正規直交展開としての以下の性質を満たす。

$x(t) \in L^2([-T/2, T/2))$ のFourier級数展開係数を X_k とし，以下を定義。

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^N X_k \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

1. $L^2([-T/2, T/2))$ での反転：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|x - \hat{x}_N\| = 0$$

2. Parsevalの等式：

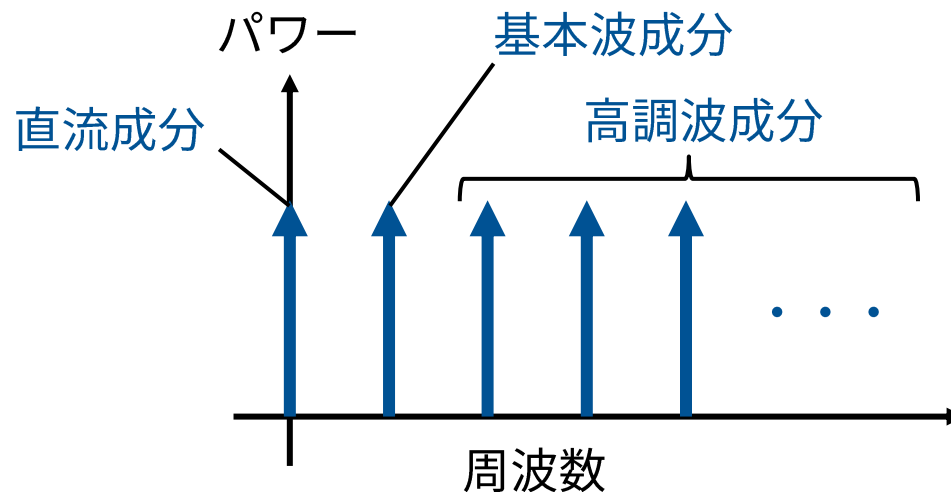
$$\|x\|^2 = T \sum_{k \in \mathbb{Z}} |X_k|^2, \quad \langle x, y \rangle = T \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k Y_k^*$$

3. 最小2乗近似：

$\hat{x}_N(t)$ は $\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right) \right\}_{k=-N}^N$ による部分空間での $x(t)$ の最小2乗近似

Fourier級数展開の各項の意味

- Fourier級数展開した各項の係数はくし形の線スペクトルとなる。
 - a_0 : 直流成分
 - $\cos(2\pi t/T), \sin(2\pi t/T)$: 基本波成分 (周波数 $1/T$)
 - $\cos(2\pi kt/T), \sin(2\pi kt/T)$: 第 k 高調波成分 (周波数 k/T)



Fourier級数展開の各項の意味

➤ c_k, a_k, b_k は, 第 k 高調波 (周波数 k/T) に対応。

– 第 k 高調波の振幅 :

$$|c_k| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2}$$

– 第 k 高調波のパワー :

$$|c_k|^2 = \frac{a_k^2 + b_k^2}{4}$$

– 第 k 高調波の位相 :

$$\arg(c_k) = \tan^{-1} \left(-\frac{b_k}{a_k} \right)$$

$$c_k = \begin{cases} a_0, & k = 0 \\ \frac{a_k - jb_k}{2}, & k \neq 0 \end{cases}$$

対称性

➤ 偶関数・奇関数と実部・虚部の関係：

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left(-j\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{\Re(x(t)) + j\Im(x(t))\} \left\{ \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right\} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \left[\Re(x(t)) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \Im(x(t)) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + j \left[\Im(x(t)) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) - \Re(x(t)) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right] \right\} dt \end{aligned}$$

実部と虚部に分解

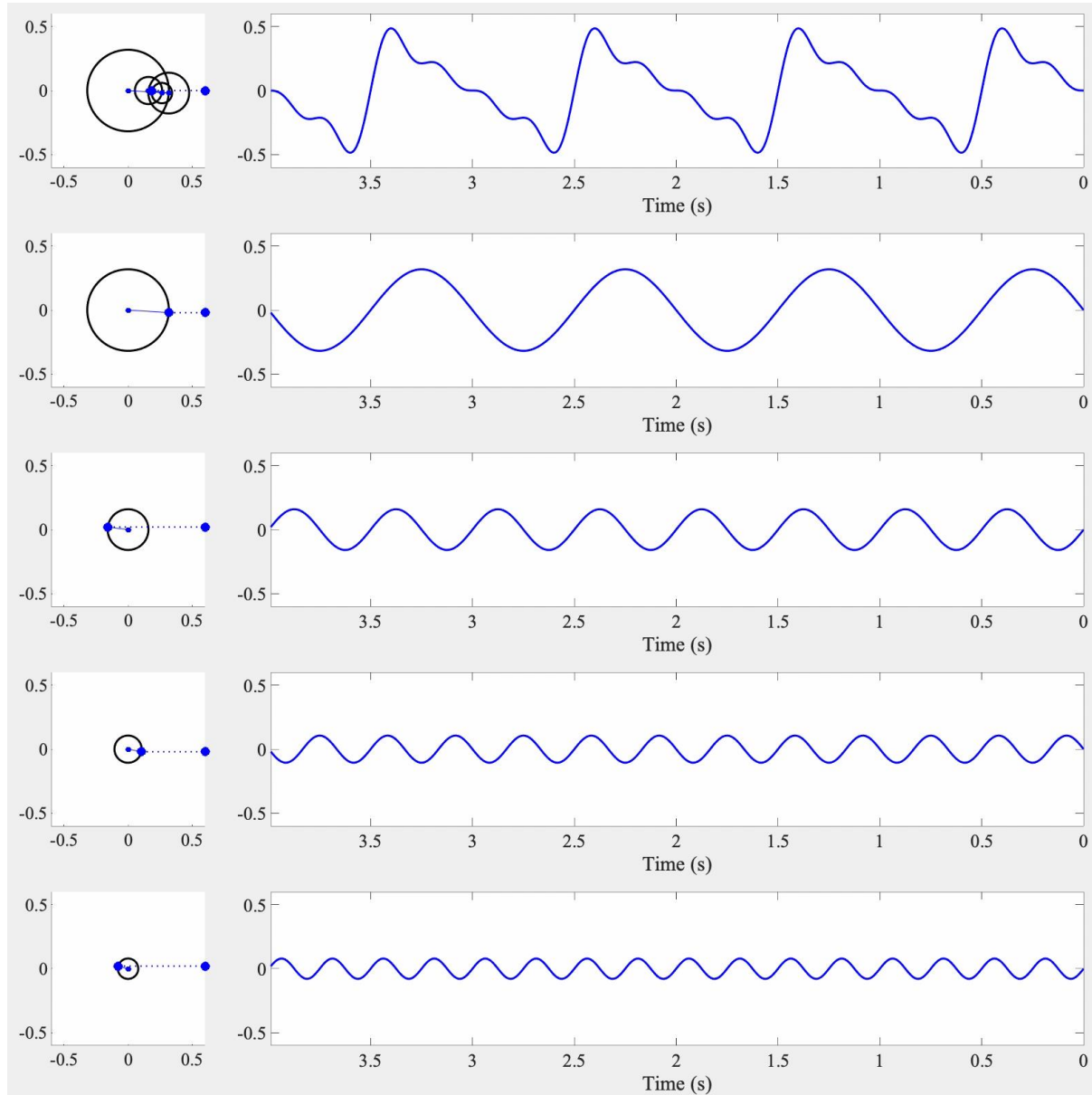
偶関数・奇関数

対称性

➤ 偶関数・奇関数と実部・虚部の関係：

$x(t)$		C_k	
\Re	\Im	\Re	\Im
even	0	even	0
odd	0	0	odd
0	even	0	even
0	odd	odd	0

Fourier級数展開の意味





- Fourier級数の部分和は畳み込みの形に変形できる。

$$\begin{aligned}x_N(t) &= \sum_{k=-N}^N \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) \exp\left(-j\frac{2\pi k\tau}{T}\right) d\tau \right] \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right) \\&= \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) \frac{1}{T} \sum_{k=-N}^N \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right) \exp\left(-j\frac{2\pi k\tau}{T}\right) d\tau \\&= \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) \frac{1}{T} \sum_{k=-N}^N \exp\left(j\frac{2\pi k(t-\tau)}{T}\right) d\tau \\&= \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) D_N(t-\tau) d\tau\end{aligned}$$

この $D_N(t)$ をDirichlet核と呼ぶ

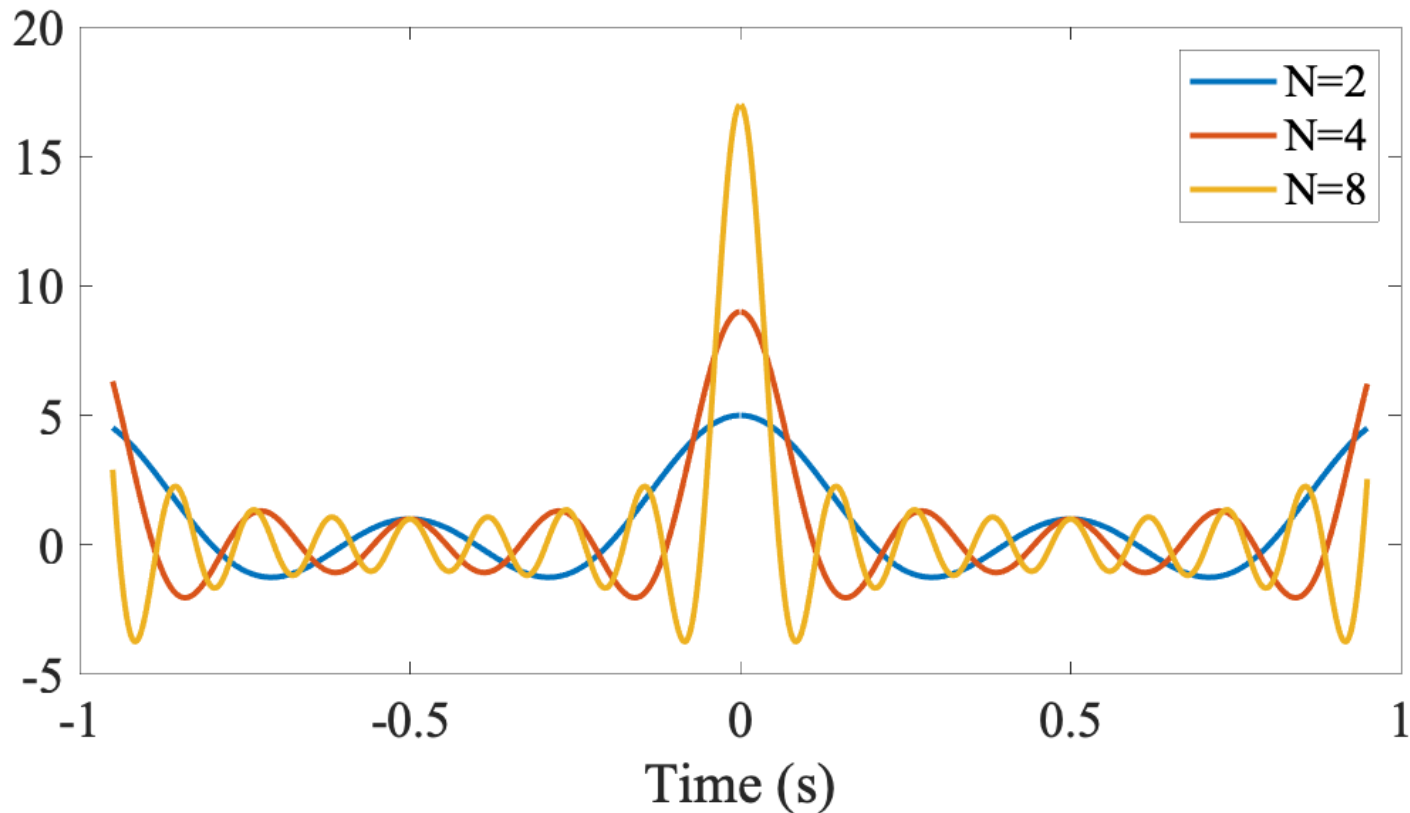


➤ Dirichlet核を具体的に導出すると、

$$\begin{aligned}
 D_N(t) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-N}^N \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right) \\
 &= \frac{1}{T} \exp\left(-j\frac{2\pi Nt}{T}\right) \frac{1 - \exp\left(j\frac{2\pi(2N+1)t}{T}\right)}{1 - \exp\left(j\frac{2\pi t}{T}\right)} \quad \text{等比数列の和} \\
 &= \frac{1}{T} \frac{\exp\left(-j\frac{2\pi(2N+1)t}{2T}\right)}{\exp\left(-j\frac{2\pi t}{2T}\right)} \frac{1 - \exp\left(j\frac{2\pi(2N+1)t}{T}\right)}{1 - \exp\left(j\frac{2\pi t}{T}\right)} \\
 &= \frac{1}{T} \frac{\exp\left(-j\frac{2\pi(2N+1)t}{2T}\right) - \exp\left(j\frac{2\pi(2N+1)t}{2T}\right)}{\exp\left(-j\frac{2\pi t}{2T}\right) - \exp\left(j\frac{2\pi t}{2T}\right)} \frac{-1}{2j} \\
 &= \frac{1}{T} \frac{\sin\left(\frac{\pi(2N+1)t}{T}\right)}{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)} \quad \text{sin関数とするための係数}
 \end{aligned}$$



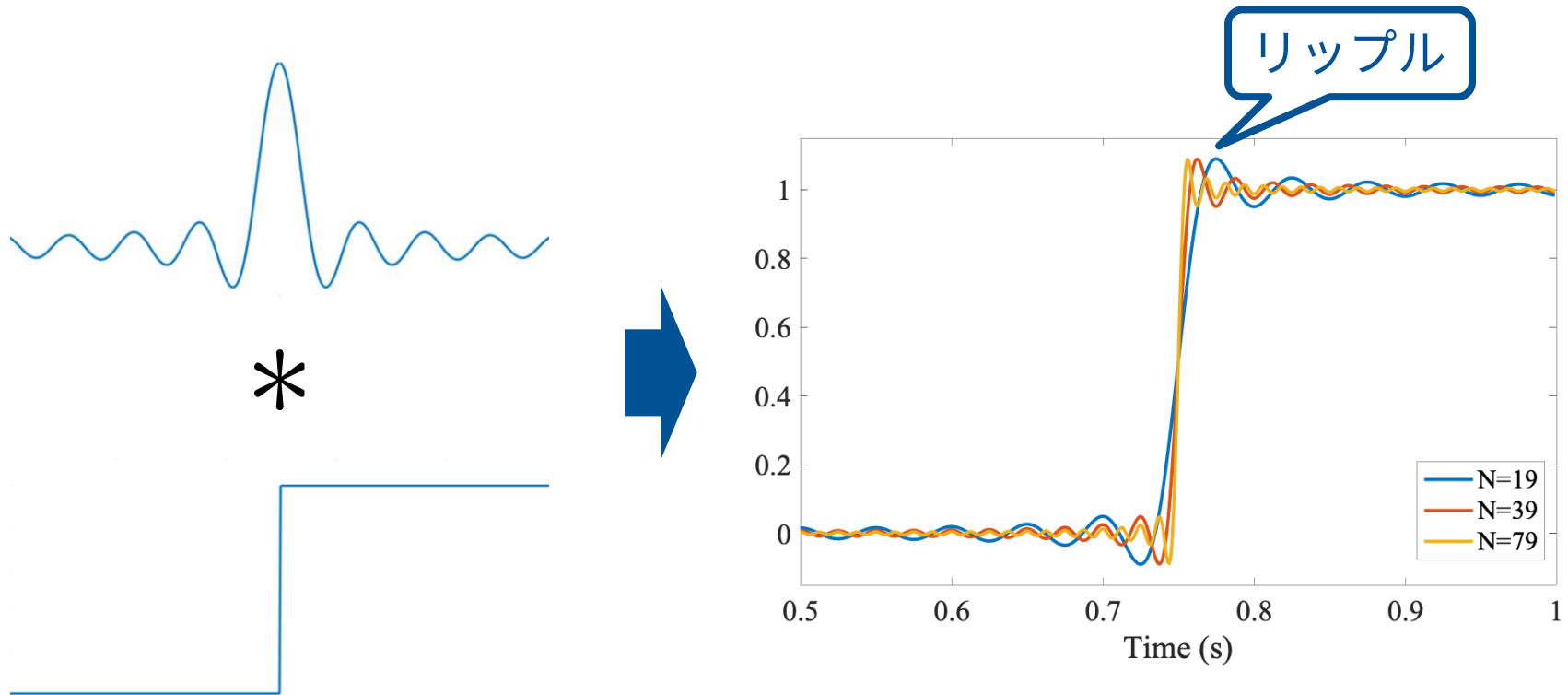
➤ $T = 1$ の場合のDirichlet核



Gibbs現象



- Dirichlet核の畳み込みは、不連続点で大きな振動現象を生じさせる。これをGibbs現象と呼ぶ。



参考文献

1. 眞溪歩, "デジタル信号処理工学," 昭晃堂, 2004.
2. M. Vetterli, J. Kovačević, and V. K. Goyal, "Foundations of Signal Processing," Cambridge University Press, 2014.