信号処理論第一
第2回：数学的準備

東京大学 大学院情報理工学系研究科 システム情報学専攻
小山 翔一

講義の目的と概要

- 講義の目的
  - 信号処理の基礎を習得する。

- 講義の概要
  - 決定論的信号（確定的信号）に関する信号処理について，基礎事項を理解する。本講義では，できるだけ特定の応用分野に限らない，一般的な信号処理論について講義する。ただし，統計的信号処理については扱わず，信号処理論第二の範囲となる。

- キーワード
  - Fourier級数, Fourier変換, 離散時間Fourier変換, 離散Fourier変換, FFT, 窓Fourier変換, 線形時不変システム, サンプリング定理, インパルス応答, 伝達関数, 周波数応答, 差分方程式, ブロック線図, 因果性, 安定性, FIRフィルタ, IIRフィルタ

講義スケジュール

- Sセメスター 金曜１限 (8:30-10:15) @オンライン
- 日程（暫定版）
  - 4/ 9　第１回
  - 4/16　第２回
  - 4/23　第３回
  - 4/ 30　第４回
  - 5/ 7　第５回
  - 5/14　第６回
  - 5/21　第７回

  小山担当

  - 5/28　休講
  - 6/4　第７回
  - 6/11　第８回
  - 6/18　第９回
  - 6/25　第１０回
  - 7/ 2　第１１回
  - 7/ 9　第１２回
  - 7/30　<u>学期末試験</u>

  堀崎担当

オンライン講義の実施方法

- zoom（https://zoom.us/ ）を用いる。設定方法等については ポータルサイト（ https://utelecon.github.io/oc/ ）を参照すること。
- 講義のURLは前半・後半それぞれで毎回同じにする予定。後半(6/4)からはURLが変更となるので必ずITC-LMSを確認すること。
- 質問がある場合は，チャットに書き込む，あるいはミュートをオフにして音声で質問する，のいずれかの方法で行うこと。
- もしオンラインでの受講に不都合が生じた場合は，メール等で連絡すること。

shoichi_koyama@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

horisaki@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

講義資料と成績評価

- 講義資料・動画
  - ITC-LMSにアップロード
  - 資料はできるだけ講義前日までにアップロードするようにします。

- 成績評価
  - 学期末試験（暫定）
  - 第7回（5/21）に小テストを実施する可能性あり

本日の目次

1. 表記法
   – 今後，数式が多く出てくるため，最初に表記上の取り決めをしておく。
2. 数学の復習
   – 複素数の取り扱い
   – 行列とベクトルの取り扱い
   – 畳み込み

表記法

変数

- スカラー：
  - イタリック
  - $a, \ A$
- ベクトル：
  - イタリック，ボールド，原則小文字
  - $\boldsymbol{a}$
- 行列：
  - イタリック，ボールド，大文字
  - $\boldsymbol{A}$

定数

- 自然対数の底
  - e
- 円周率
  - π
- 虚数単位
  - $\mathrm{j}\ (\mathrm{j}^2 = -1)$
  - 信号処理では慣習的に i は用いない
- $M \times M$ 単位行列
  - $\boldsymbol{I}_M$
- $M \times N$ 零行列
  - $\boldsymbol{0}_{M \times N}$

予約変数

- 時間の変数
  - 連続時間系：t
  - 離散時間系：n
- (角)周波数の変数
  - 連続周波数系：$\omega,\ \Omega$
  - 離散周波数系：k
- 指数関数
  - $\exp(x) = e^x$
- 複素共役
  - z^* (z は複素数)

集合

- 自然数
  - $\mathbb{N}$:　$0,\ 1,\ \ldots$
- 整数
  - $\mathbb{Z}$:　$\ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots$
- 有理数
  - $\mathbb{Q}$:　$p/q,\ p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$
- 実数
  - $\mathbb{R}$:　$(-\infty, \infty)$
- 複素数
  - $\mathbb{C}$:　$a + \mathrm{j}b$ or $r\exp(\mathrm{j}\theta)$ with $a, b, r, \theta \in \mathbb{R}$

関数，数列

- 関数
  - $x(t) \quad (t \in \mathbb{R})$
  - 連続時間信号：$x(t)$
- 数列
  - $x_n \quad (n \in \mathbb{Z})$
  - 離散時間信号：$x[n]$
- 数列による順序集合
  - $(x_n)_n$
- x_n からなる集合
  - $\{x_n\}_n$

汎関数，演算子

- 汎関数
  - $A\left[x[t]\right]$, $\mathcal{F}\left[x(t)\right]$

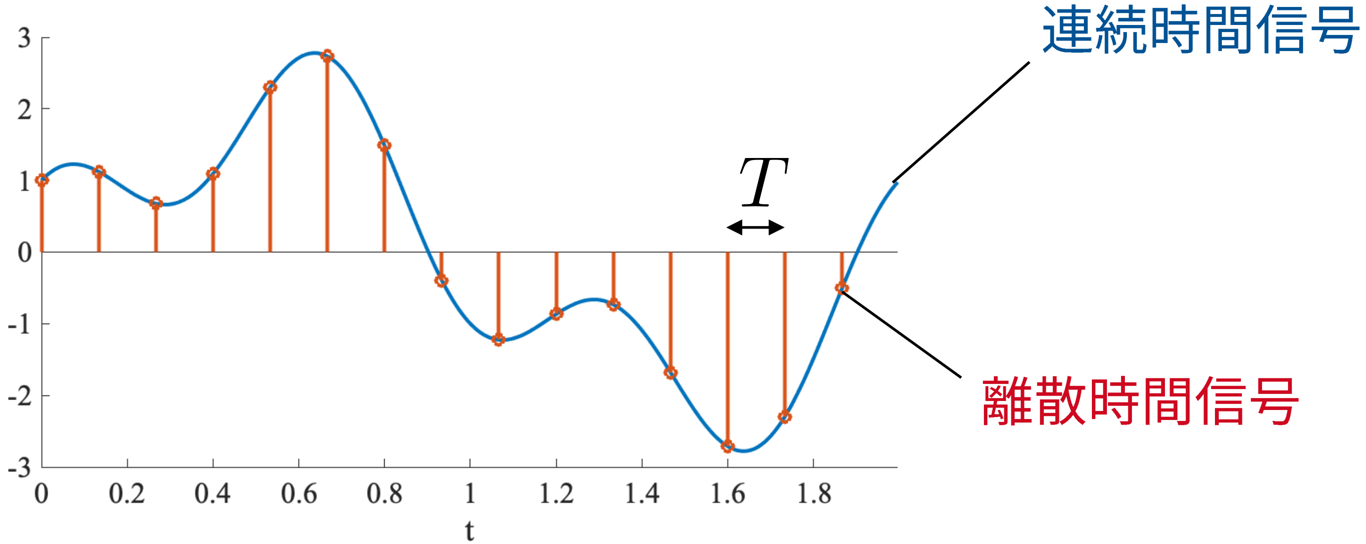
- 演算子
  - 転置： $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$
  - Hermite転置： $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}} = (\boldsymbol{A}^{*})^{\mathsf{T}}$
  - 複素数の実部，虚部，偏角：$\Re(z)$, $\Im(z)$, $\arg(z)$
    - $\Re(a + \mathrm{j}b) = a,\ a, b \in \mathbb{R}$
    - $\Im(a + \mathrm{j}b) = b,\ a, b \in \mathbb{R}$
    - $\arg(r\exp(\mathrm{j}\theta)) = \theta,\ r, \theta \in \mathbb{R}$

- 連続時間信号

$$x(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

- 離散時間信号

$$x[n] = x(nT) \quad (n \in \mathbb{Z})$$



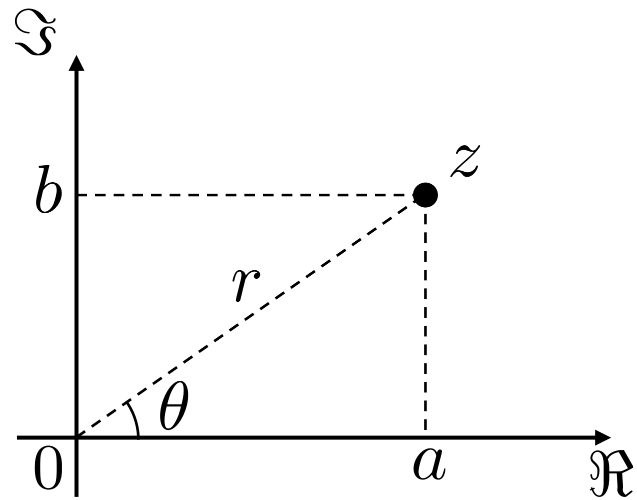
数学の復習 – 複素数の取り扱い

複素数の取り扱い

- 複素数の表記
  - $z \in \mathbb{C}$：複素平面（z平面，Gauss平面）上の１点を表現
    - スカラーでありながら，ベクトルのような性質を持つため，幾何的なイメージを持つことが重要。

$$z = a + \mathrm{j}b \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$\Re(z) = a,\ \Im(z) = b$$



$$z = r\exp(\mathrm{j}\theta) = r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$$

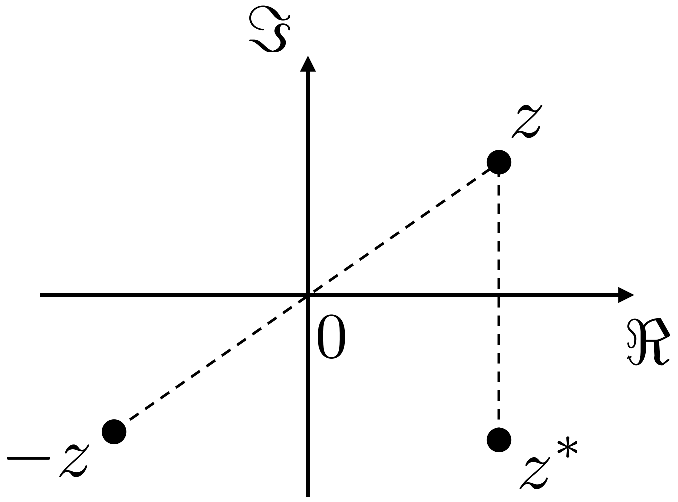
$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2},\ \theta = \arg(z) = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

複素共役

$$z = a + \mathrm{j}b$$

複素共役

$$z^* = a - \mathrm{j}b$$



$$\Re(z) = a = \frac{z + z^*}{2}$$

$$\Im(z) = b = \frac{z - z^*}{2\mathrm{j}}$$

$$\exp(\pm \mathrm{j}\theta) = \cos\theta \pm \mathrm{j}\sin\theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

Proof

指数関数のMaclaurin展開

$$\begin{aligned}
\exp(\mathrm{j}\theta) &= 1 + \frac{\mathrm{j}\theta}{1!} + \frac{(\mathrm{j}\theta)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\mathrm{j}\theta)^n}{n!} + \cdots \\
&= 1 + \mathrm{j}\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} + \mathrm{j}\frac{\theta^3}{3!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + \mathrm{j}\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta
\end{aligned}$$

cosとsinのMaclaurin展開

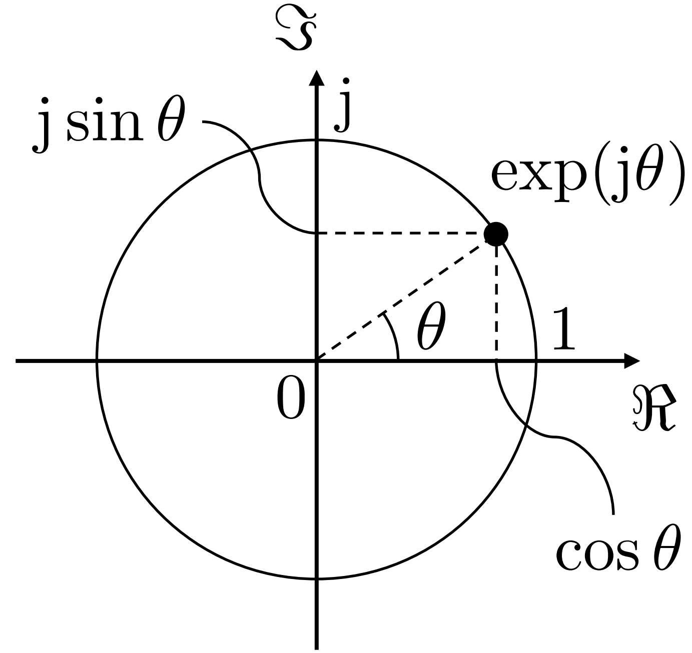
Eulerの公式

- Eulerの公式によって，複素平面の単位円上の１点を簡単に表現できる。

$$\cos\theta = \frac{\exp(\mathrm{j}\theta)+\exp(-\mathrm{j}\theta)}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{\exp(\mathrm{j}\theta)-\exp(-\mathrm{j}\theta)}{2\mathrm{j}}$$

  – 複素共役は $\exp(-\mathrm{j}\theta)$



- 任意の点を表す場合は，

$$r\exp(\mathrm{j}\theta) = \exp(\ln r + \mathrm{j}\theta) \quad (r, \theta \in \mathbb{R})$$

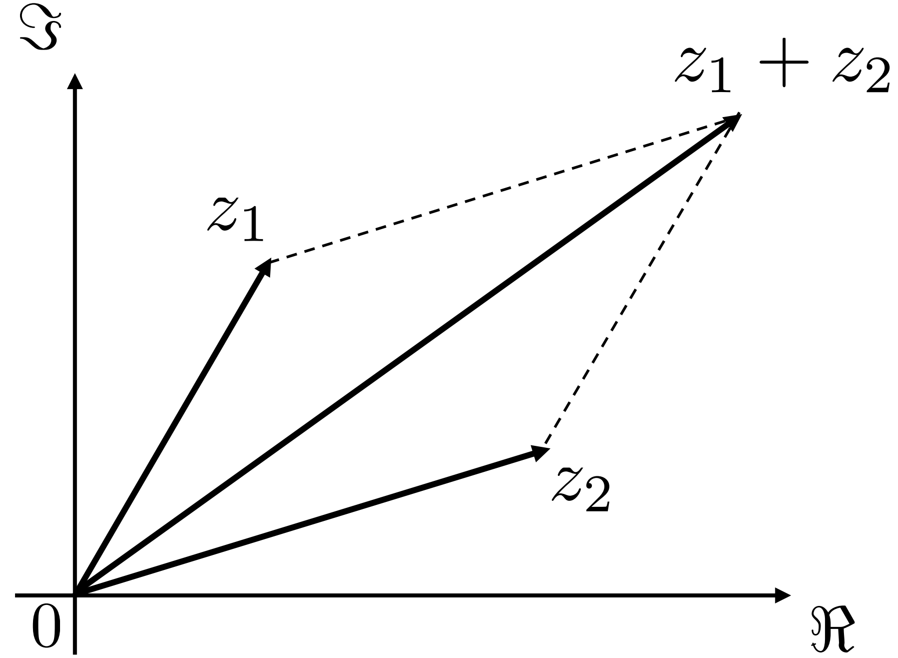
複素数の四則演算

- 和と差

$$z_1 = x_1 + \mathrm{j}y_1$$

$$z_2 = x_2 + \mathrm{j}y_2$$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{j}(y_1 \pm y_2)$$



- 積：拡大・回転変換

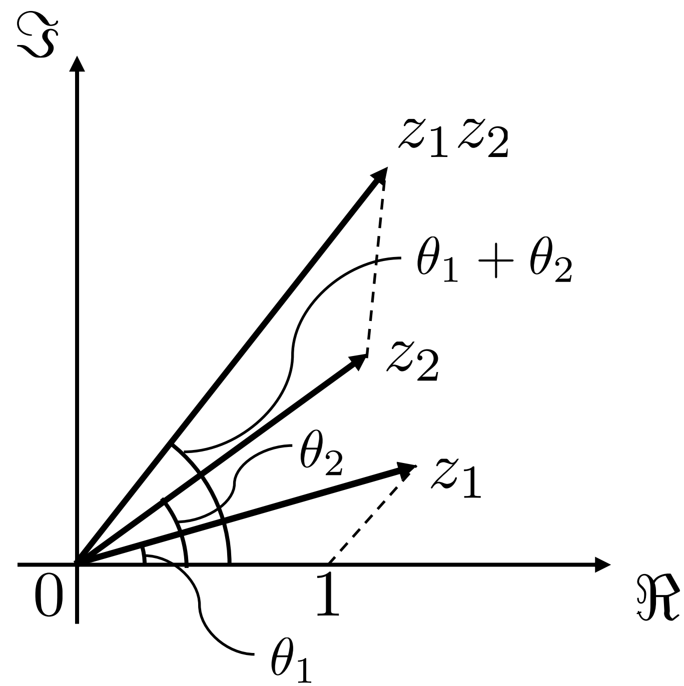
$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{j}\sin\theta_1) \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{j}\sin\theta_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{j}\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$$

不定性が伴う

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 + 2m\pi = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2m\pi$$



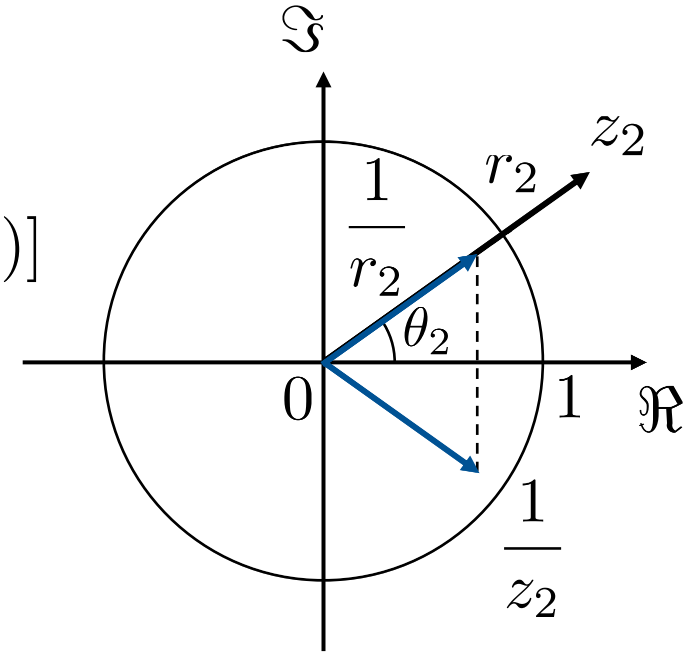
複素数の四則演算

- 商

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{j}\sin\theta_1) \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{j}\sin\theta_2)$$

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2}(\cos\theta_2 - \mathrm{j}\sin\theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) - \mathrm{j}\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$$



$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 + 2m\pi = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2m\pi$$

複素数の四則演算

➢ 複素共役を含む場合

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$

数学の復習 – 行列・ベクトルの取り扱い

ベクトル空間

- ベクトル空間の公理
  - 集合Vが和と積に関して閉じており，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (or $\mathbb{R}$)が以下の条件を満たすとき，Vをベクトル空間と呼ぶ。

1. 可換律：$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$
2. 結合律：$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$，$(\alpha\beta)\boldsymbol{x} = \alpha(\beta\boldsymbol{x})$
3. 分配律：$\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$，$(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$
4. 零ベクトル$\mathbf{0} \in V$が存在：$\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$
5. 加法逆元$-\boldsymbol{x} \in V$が存在：$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$
6. 乗法の単位元が存在：$1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

内積

- ベクトル空間の２つの元によって定義される関数

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C} \text{ (or } \mathbb{R})$$

- 内積の公理
  - $\mathbb{C}$ (or $\mathbb{R}$) 上のベクトル空間 V における内積は，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$，$\alpha \in \mathbb{C}$ (or $\mathbb{R}$)に関して，以下の性質を満たす。

1. 分配律： $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$
2. 第一引数に関する線形性： $\langle \alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$
3. Hermite対称性：$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^* = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$
4. 正定値性：$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ かつ，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ iff $\boldsymbol{x} = 0$

標準内積

- $\mathbb{C}^N$における標準内積

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n^* = \boldsymbol{y}^{\mathsf{H}} \boldsymbol{x}$$

- $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ における標準内積

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n y_n^* = \boldsymbol{y}^{\mathsf{H}} \boldsymbol{x}$$

- $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ における標準内積

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) \mathrm{d}t$$

内積空間

- 内積が定義された空間を内積空間と呼ぶ。
  - $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ や $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ 上の内積の場合，内積が有限の値に収束しなければならないことに注意。

ノルム

- ノルムの公理
  - $\mathbb{C}$ (or $\mathbb{R}$)上のベクトル空間 V におけるノルムは，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ ，$\alpha \in \mathbb{C}$ (or $\mathbb{R}$)に関して以下の性質を満たす関数 $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$

1. 正定値性： $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ かつ，$\|\boldsymbol{x}\| = 0$ iff $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
2. 正斉次性： $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$
3. 三角不等式：$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$，
   $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$ のときに限り等号成立

ノルム

- 内積を用いて定義されたノルムを，内積が誘導するノルムと呼ぶ。
- 先程の標準内積が誘導する標準ノルムは以下のように定義される。
  - $\mathbb{C}^N$における標準ノルム

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

  - $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ における標準ノルム

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

  - $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ における標準ノルム

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$$

ノルム空間

- ノルムが定義されたベクトル空間をノルム空間と呼ぶ。
  - 内積と同様に，ノルムが有限の値に収束しなければならないことに注意。

ノルム空間の例

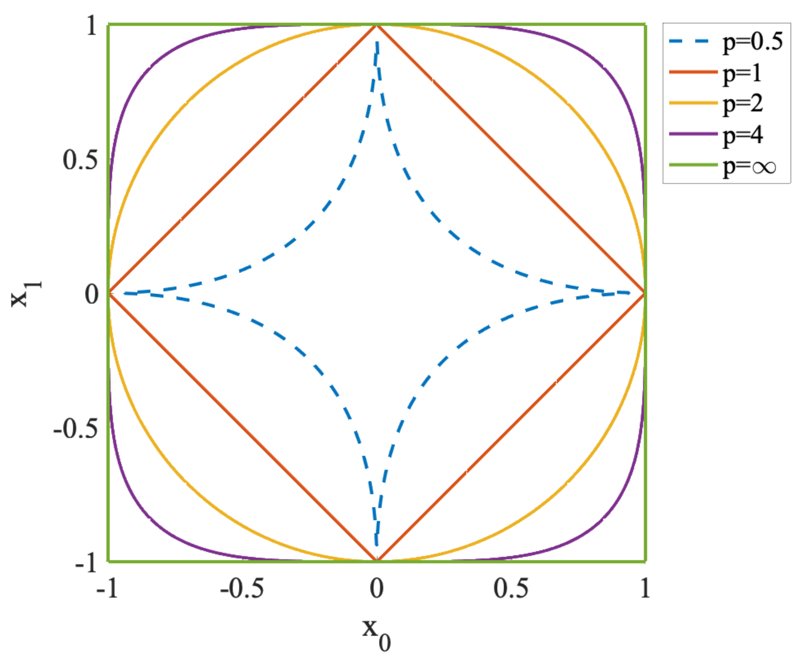
- $\ell^p(\mathbb{Z})$ノルム空間

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (p \in [1,\infty))$$

- $L^p(\mathbb{R})$ノルム空間

$$\|x\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (p \in [1,\infty))$$

➡ これらのノルムが有限の値に収束するベクトル空間

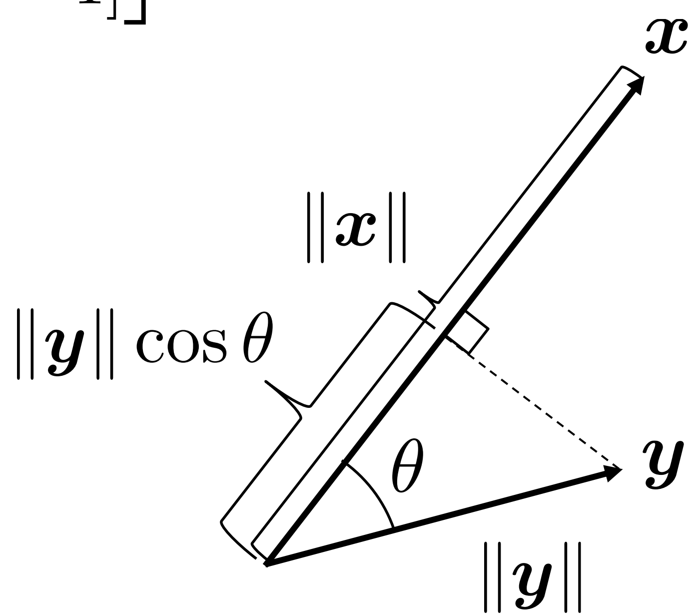


信号処理における内積・ノルムの役割

- 連続時間信号は関数として，離散時間信号はベクトルとして扱うことができる。
- Nサンプルの離散時間信号によるベクトルと内積

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y[0] \\ \vdots \\ y[N-1] \end{bmatrix} \quad (\in \mathbb{R}^N)$$

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] y[n] \\ &= \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| \cos\theta \end{aligned}$$



信号処理における内積・ノルムの役割

- 例えば，コサイン類似度

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|}$$

  - $[-1, 1]$ の値を取り，２つのベクトル（信号）の近さを測る指標となる。

- 例えば，離散Fourier変換

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

  - 信号と各単一周波数複素正弦波との内積を取ることで，信号を周波数成分に分解。

固有値分解

- $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ の正方行列が，N 個の異なる固有値を持つとする。
- 固有値 λ_n，固有ベクトル $\boldsymbol{u}_n$ $(n \in \{0, \ldots, N-1\})$とすると，これらは以下を満たす。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_n = \lambda_n \boldsymbol{u}_n$$

固有値分解

- 線形変換 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N)$ を固有ベクトル $\{\boldsymbol{u}_n\}_{n=0}^{N-1}$ に展開した形で考える。

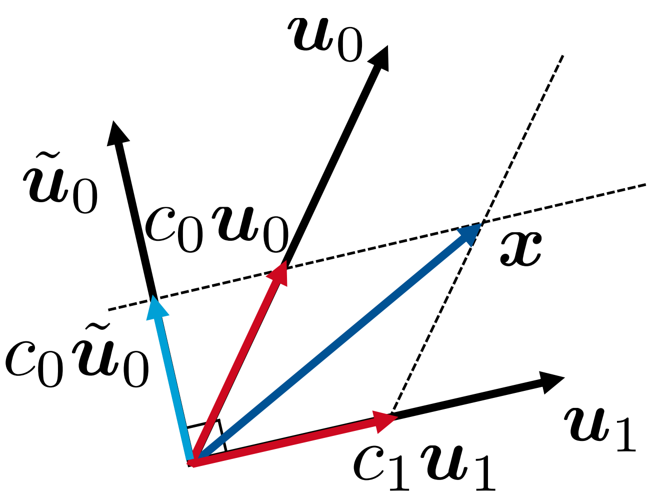
$$\boldsymbol{x} = c_0\boldsymbol{u}_0 + c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_{N-1}\boldsymbol{u}_{N-1}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{A}\left(c_0\boldsymbol{u}_0 + c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_{N-1}\boldsymbol{u}_{N-1}\right) \\ &= \lambda_0(c_0\boldsymbol{u}_0) + \lambda_1(c_1\boldsymbol{u}_1) + \cdots + \lambda_{N-1}(c_{N-1}\boldsymbol{u}_{N-1})\end{aligned}$$

➡ 線形変換は，固有ベクトルへの展開係数を固有値倍して再合成する操作とみなせる。

固有値分解

- 展開係数$(c_n)_{n=0}^{N-1}$はどのように求める？
  - 固有ベクトル$\{\boldsymbol{u}_n\}_{n=0}^{N-1}$は一般には互いに直交しない
  - $\boldsymbol{U} = \left[\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_{N-1}\right]$の逆行列を用いて得られるベクトルとの内積を利用（cf. 双直交展開→第3回）



$$\tilde{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{u}}_0^\top \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{u}}_{N-1}^\top \end{bmatrix} \left[\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_{N-1}\right]$$

$$= \boldsymbol{I}_N$$

$$\tilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U}^{-1}$$

$$c_n = \langle \boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{u}}_n \rangle$$

固有値分解

➢ 固有値分解の式を N 個並べた式を考えると，

$$\boldsymbol{U} = \left[\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_{N-1}\right]$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\left(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1}\right) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda}$$ ：対角化

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{-1}$$ ：固有値分解

線形変換を書き換えると，

再合成　固有ベクトルへ展開

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{x}$$

固有値倍

固有値分解

- $\boldsymbol{A}$ が対称行列の場合($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$)
  - $\boldsymbol{U}$ が直交行列（$\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{I}$）となり，逆行列を求める必要がない。

$$\boldsymbol{U}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{\mathsf{T}}$$

- $\boldsymbol{A}$ がHermite行列の場合($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{H}} = (\boldsymbol{A}^{*})^{\mathsf{T}}$)
  - $\boldsymbol{U}$ がユニタリ行列（$\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{I}$）となり，逆行列を求める必要がない。

$$\boldsymbol{U}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{\mathsf{H}}$$

固有値分解

➢ 関数に対する固有値分解

– 第1種Fredholm型積分方程式

核関数

$$y(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t$$

– 固有値・固有関数は以下を満たす。

$$\lambda u(s) = \int_a^b K(s,t)u(t)\mathrm{d}t$$

固有値

固有関数

– 核関数が対称 ($K(s,t) = K(t,s)$)であれば，固有関数は直交する。例えば，Fourier変換：

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t$$

数学の復習 – 畳み込み

- 畳み込みは２つの関数・数列から，別の関数・数列を求める操作
  - 連続系：

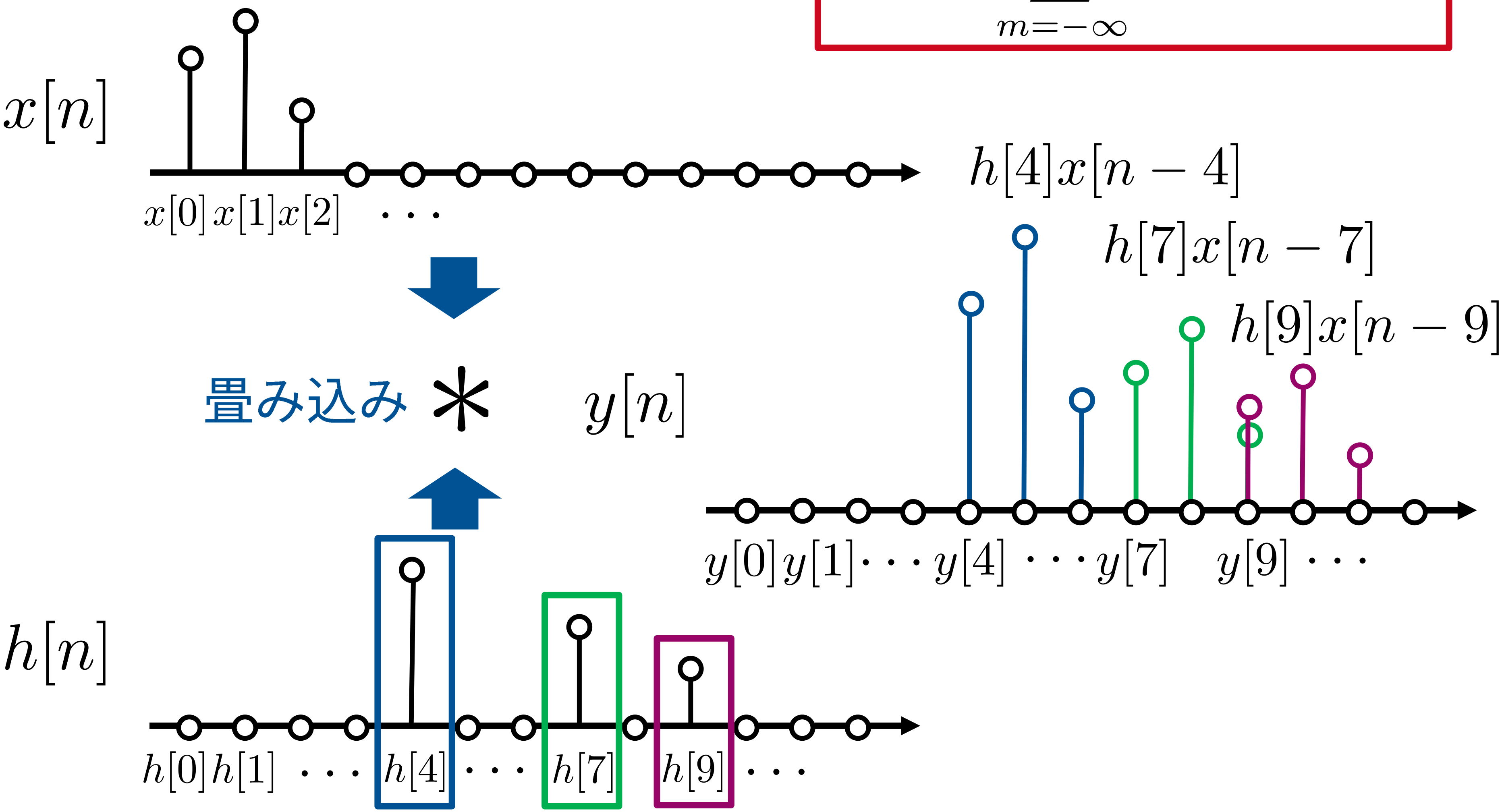
$$
\begin{aligned}
y(t) = h(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

  - 離散系：

$$
\begin{aligned}
y[n] = h[n] * x[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x[m]
\end{aligned}
$$

- 畳み込み演算のイメージ

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

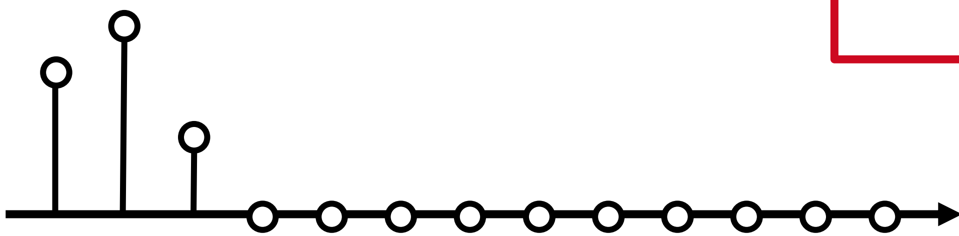


畳み込み

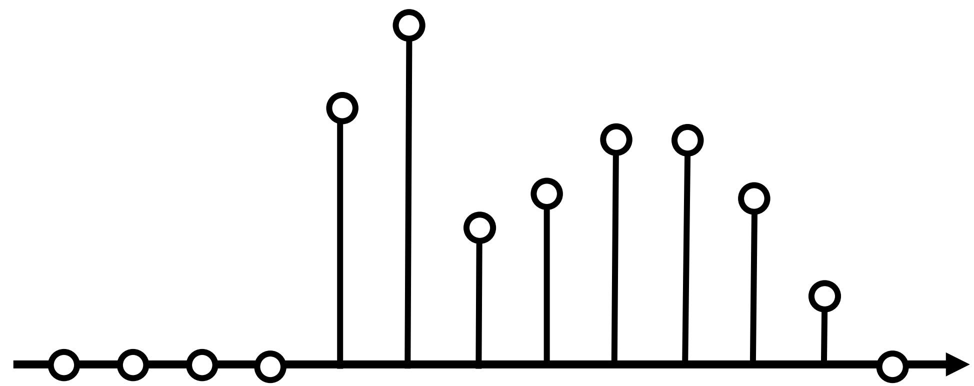
➢ 畳み込み演算のイメージ

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

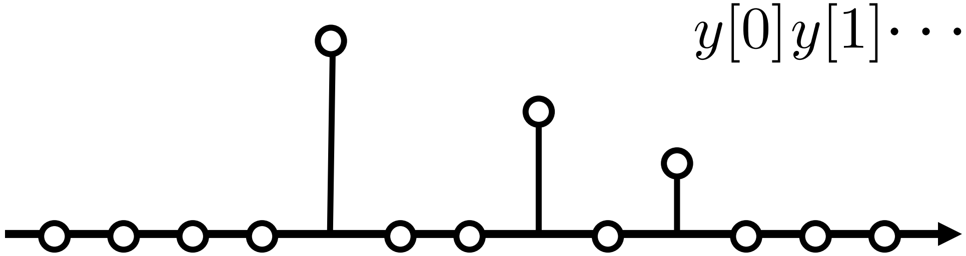
$x[n]$



畳み込み $*$ $y[n]$

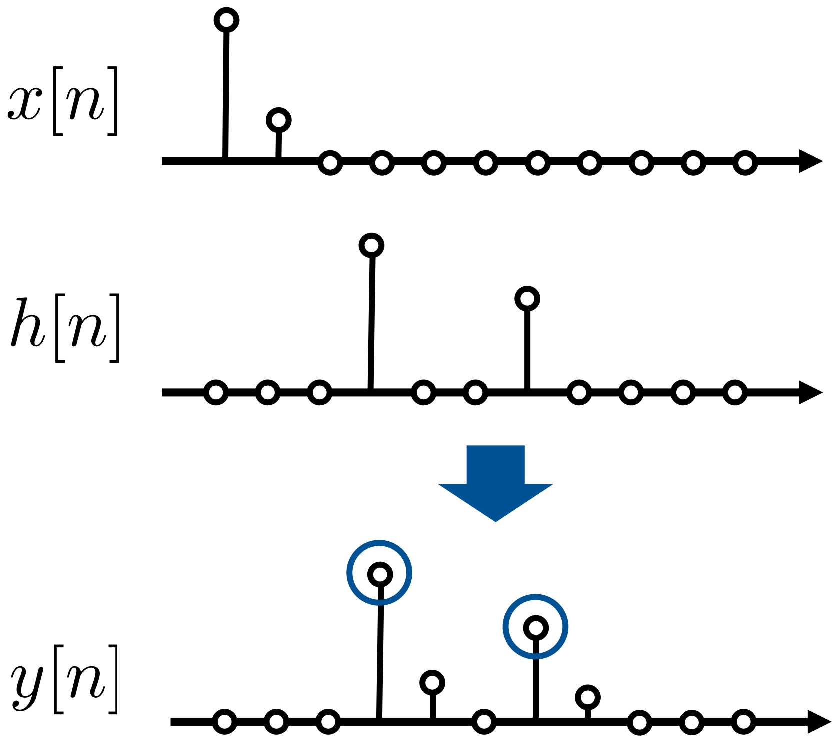


$h[n]$

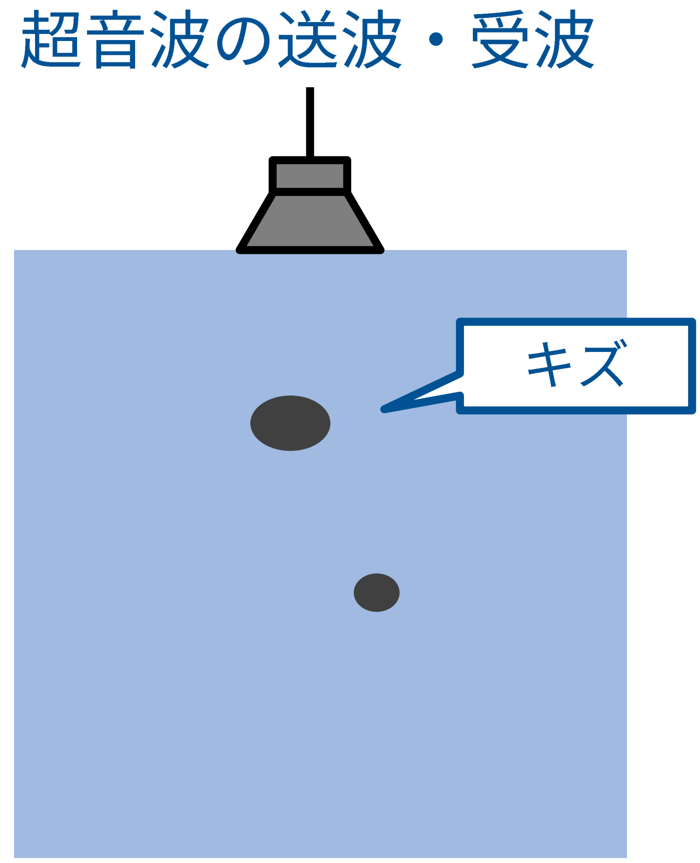


$$\begin{aligned} y[n] =& h[4]x[n-4] \\ &+ h[7]x[n-7] \\ &+ h[9]x[n-9] \end{aligned}$$

- 畳み込みの応用例
  - 超音波探傷検査におけるパルス反射法



受信波形のパルス位置から
キズの位置を推定



巡回畳み込み

- 周期的な関数や数列に対する畳み込みの操作を巡回畳み込み，あるいは循環畳み込みと呼ぶ。
  - 連続系（周期 T）：

$$y(t) = h(t) \circledast x(t) = \int_{-T/2}^{T/2} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

  - 離散系（周期 N）：

$$y[n] = h[n] \circledast x[n] = \sum_{m=0}^{N-1} h[m]x[n-m]$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} h[n-m]x[m]$$

参考文献

1. 眞溪歩, "ディジタル信号処理工学," 昭晃堂, 2004.
2. 田中聡久, “信号・データ処理のための行列とベクトル,” コロナ社, 2019.
3. M. Vetterli, J. Kovačević, and V. K. Goyal, "Foundations of Signal Processing," Cambridge University Press, 2014.