信号処理論第一：第8回
離散時間線形時不変システム

東京大学 大学院情報理工学系研究科 システム情報学専攻
小山 翔一

講義の目的と概要

- 講義の目的
  - 信号処理の基礎を習得する。

- 講義の概要
  - 決定論的信号（確定的信号）に関する信号処理について，基礎事項を理解する。本講義では，できるだけ特定の応用分野に限らない，一般的な信号処理論について講義する。ただし，統計的信号処理については扱わず，信号処理論第二の範囲となる。

- キーワード
  - Fourier級数, Fourier変換, 離散時間Fourier変換, 離散Fourier変換, FFT, 窓Fourier変換, 線形時不変システム, サンプリング定理, インパルス応答, 伝達関数, 周波数応答, 差分方程式, ブロック線図, 因果性, 安定性, FIRフィルタ, IIRフィルタ

講義スケジュール

- Sセメスター 金曜１限 @~~63講義室~~ zoom

- 日程（暫定版）
  - 4/10　第１回
  - 4/17　第２回
  - 4/24　第３回
  - 5/ 1　第４回
  - 5/ 8　休講
  - 5/15　第５回
  - 5/29　補講 - 第６回
  - 6/ 5　第７回
  - 6/12　第８回
  - 6/19　第９回
  - 6/26　第１０回
  - 7/3　第１１回
  - 7/10　第１２回
  - 7/17　学期末試験 (?)

オンライン講義の実施方法

- zoom（https://zoom.us/ ）を用いる。設定方法等についてはポータルサイト（ https://utelecon.github.io/oc/ ）を参照すること。
- 講義のURLは毎回同じにする予定だが，念のため毎回UTASをチェックすること。
- 質問がある場合は手を挙げるボタンを押すこと。タイミングをみてこちらからマイクのミュートを解除する。
- チャットにも適宜質問やコメントを書いてもらって構わない。ただし，こちらからはリアルタイムで内容を追うことは難しいと思われる。
- もしオンラインでの受講に不都合が生じた場合は，メール等で連絡すること。

shoichi_koyama@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

講義資料と成績評価

- 講義資料
  - https://www.sh01.org/ja/teaching/
  - システム１研のウェブサイトからたどることもできる
  - できるだけ講義前日までに資料をアップロードするようにします。

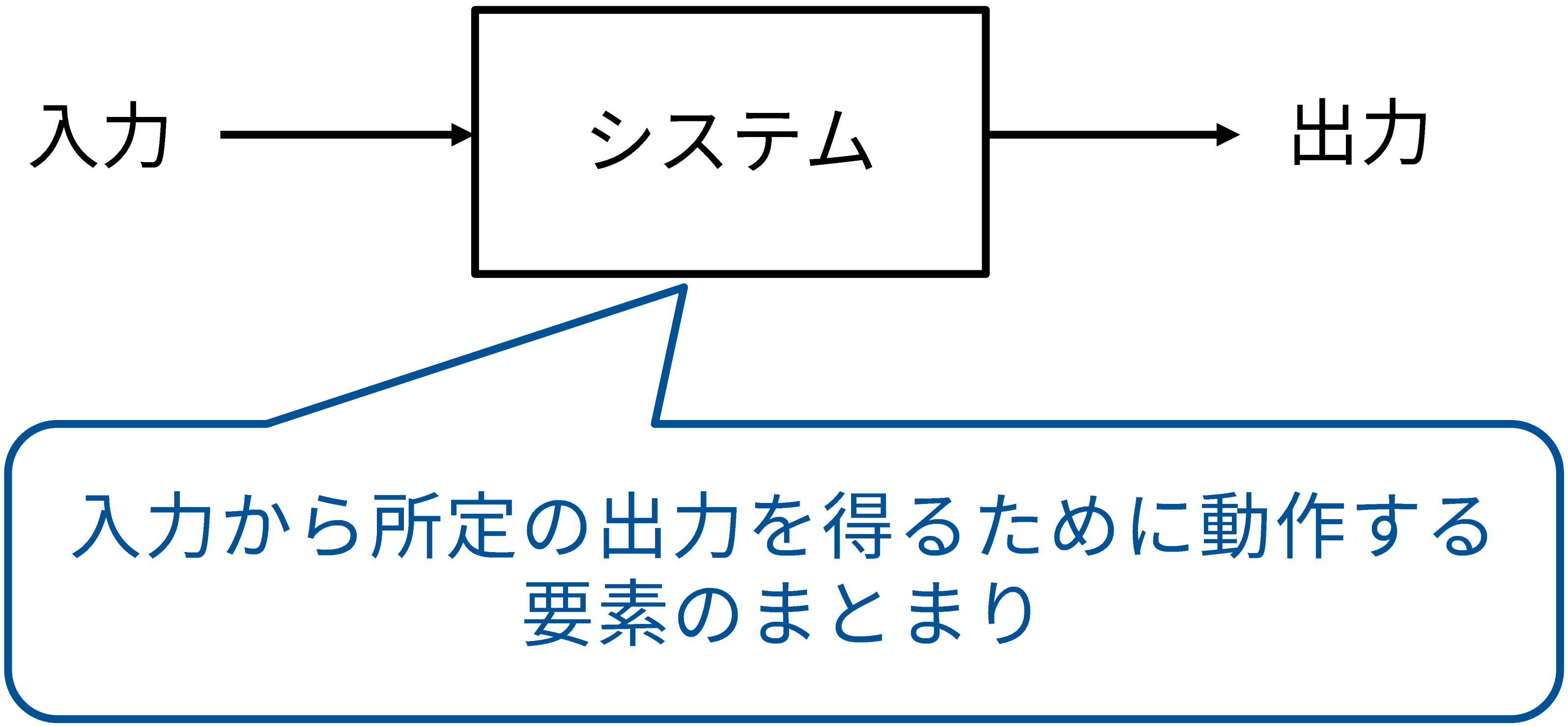
- 成績評価
  - 学期末試験（変更の可能性が高いが暫定として）

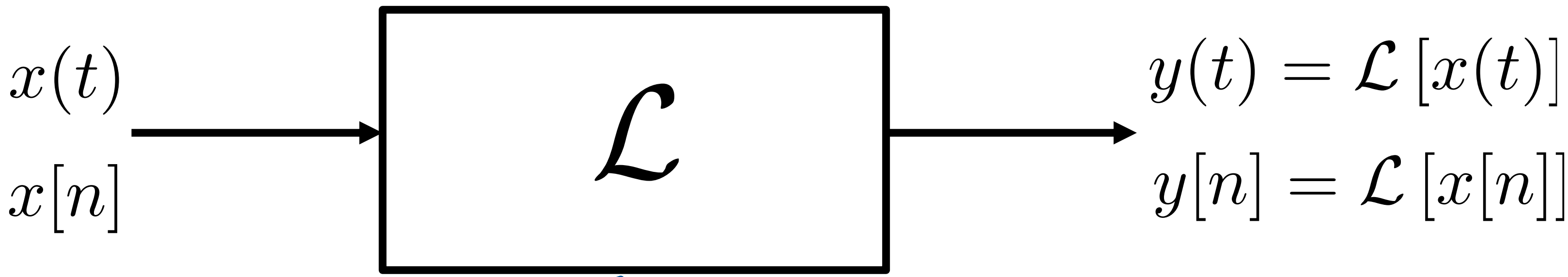
本日の目次

1. 離散時間線形時不変システム
2. インパルス応答・伝達関数
3. BIBO安定性
4. FIRシステム・IIRシステム

離散時間線形時不変システム

システムとは

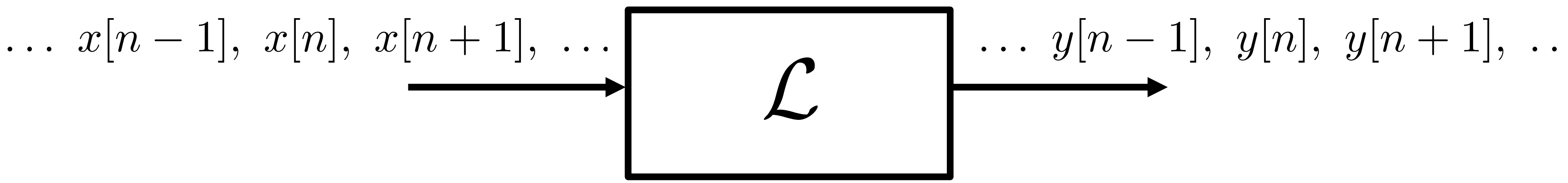




作用素 $\mathcal{L}$ により，入力信号を出力信号に変換する

本講義で扱うシステムの性質

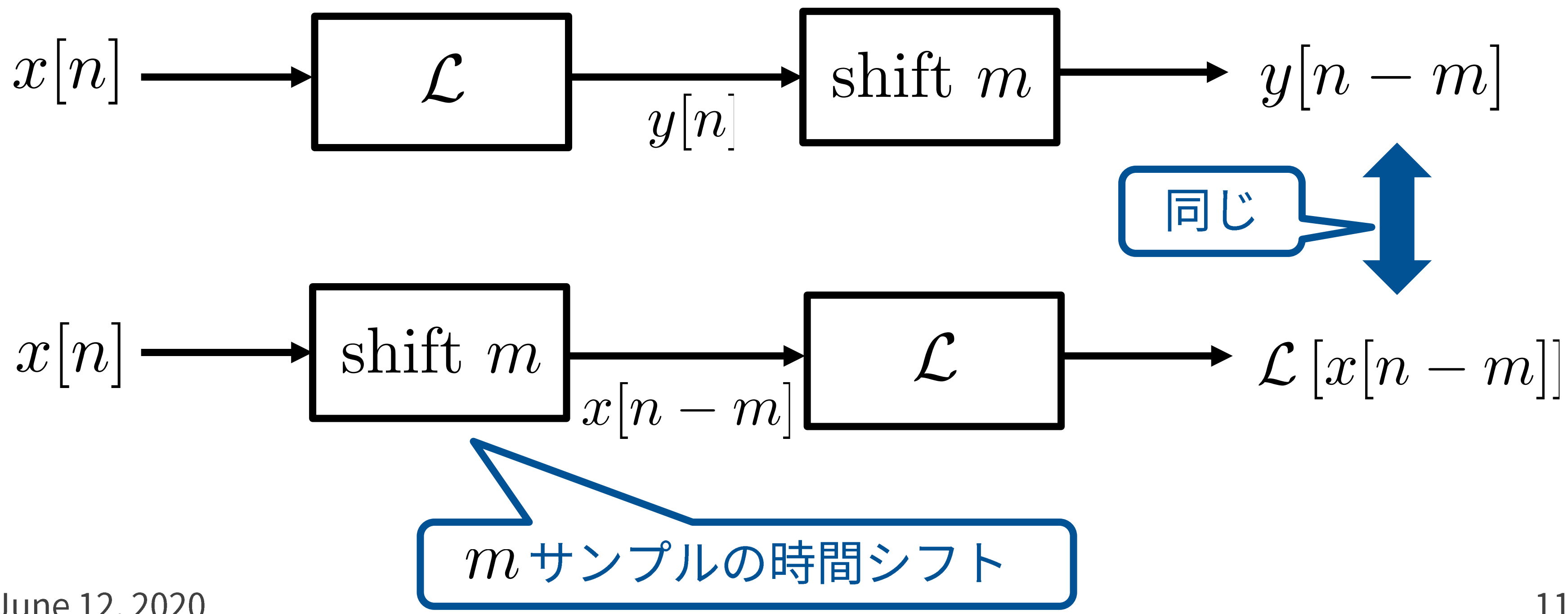
- 離散時間
  - 作用素 $\mathcal{L}$ により，離散時間信号 $x[n]$ $(n \in \mathbb{Z})$ を入力し，離散時間時間信号 $y[n]$ を出力する。
  - 一般には，$x, y \in \ell^2(\mathbb{Z})$ or $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ を考える。



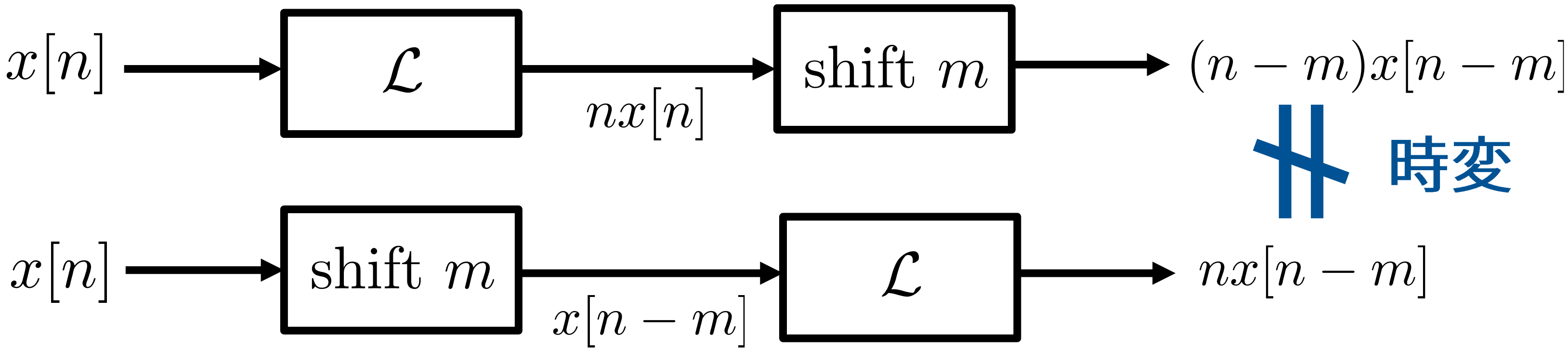
本講義で扱うシステムの性質

- 時不変性／シフト不変性
  - 時間とともにシステムの性質が変化しない。

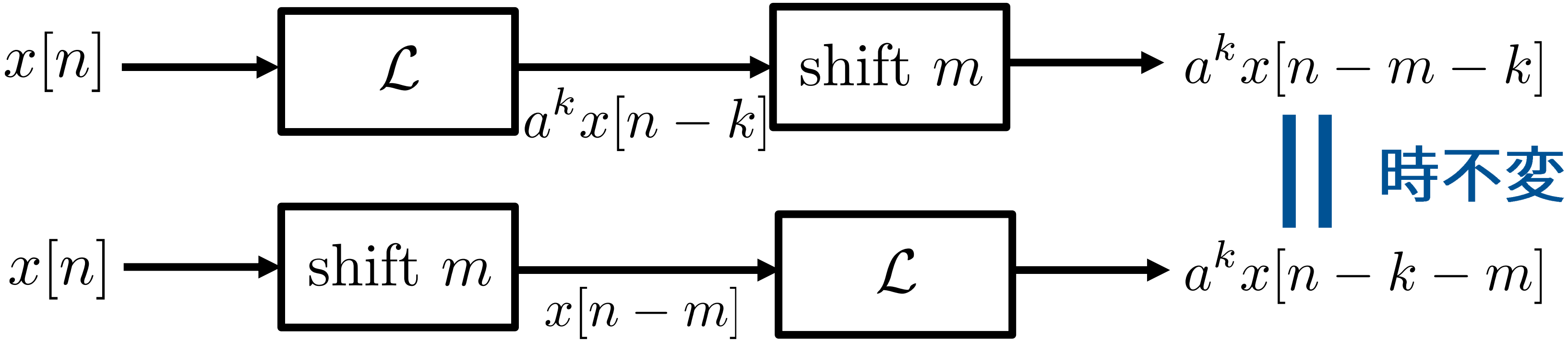
$$y[n] = \mathcal{L}\left[x[n]\right] \Rightarrow y[n-m] = \mathcal{L}\left[x[n-m]\right],\ \forall m$$



- 時不変性／シフト不変性の確認
  - $y[n] = nx[n]$



  - $y[n] = a^k x[n-k]$



本講義で扱うシステムの性質

- 線形性
  - 重ね合わせの原理が成り立つ。

$$\mathcal{L}\left[\alpha x[n] + \beta y[n]\right] = \alpha\mathcal{L}\left[x[n]\right] + \beta\mathcal{L}\left[y[n]\right]$$

$$\forall\alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

  - このとき，汎関数$\mathcal{L}$は線形作用素としても書ける。

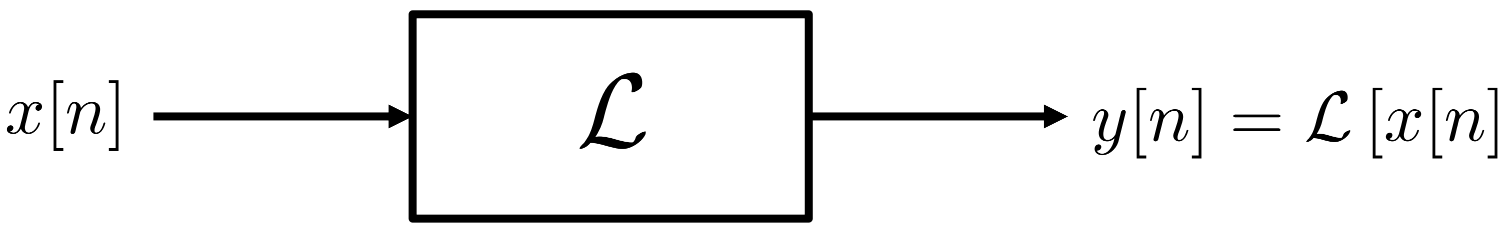
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\mathcal{L}}\boldsymbol{x}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y} = [\ldots, y[-1], y[0], y[1], \ldots]^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{x} = [\ldots, x[-1], x[0], x[1], \ldots]^{\mathsf{T}} \end{cases}$$

本講義で扱うシステム

- <u>離散時間線形時不変 (LTI) システム（Discrete-Time Linear Time Invariant System）</u>
  - 離散時間
  - 線形性
  - 時不変性・シフト不変性
  - 単入力単出力（Single-input single-output : SISO）

    [⬌ 多入力多出力（Multiple-input multiple-output: MIMO）]



インパルス応答・伝達関数

インパルス応答

➢ 準備：インパルス応答を用いた信号の表現

$$
\begin{aligned}
x[n] * \delta[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m] \left(= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[m]x[n-m] \right) \\
&= \ldots + x[n-1]\delta[1] + x[n]\delta[0] + x[n+1]\delta[-1] + \ldots \\
&= x[n]
\end{aligned}
$$

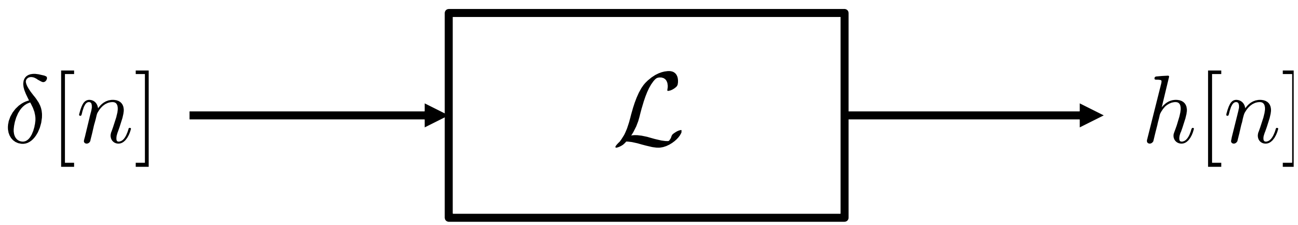
ここで，

$$
\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}
$$

インパルス応答

- インパルス応答の定義
  - インパルス $\delta[n]$ を入力したときの出力 $h[n]$

$$h[n] = \mathcal{L}\left[\delta[n]\right]$$



インパルス応答

- インパルス応答の利用価値
  - 離散時間線形時不変システムの任意の入力信号に対する出力信号は，入力信号とインパルス応答との畳み込みによって表される。

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \mathcal{L}\left[x[n]\right] \\
&= \mathcal{L}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]\right] \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathcal{L}\left[\delta[n-m]\right] \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \\
&= x[n] * h[n]
\end{aligned}
$$

無記憶システム

- 現在の入力サンプルにのみ依存するような瞬時的なシステムを無記憶システム（memoryless system）と呼ぶ。
  - 入力信号 $x[n], x'[n]$ とその出力信号 $y[n] = \mathcal{L}\left[x[n]\right], y'[n] = \mathcal{L}\left[x'[n]\right]$ が以下の関係を満たす。

$$x[n] = x'[n] \Rightarrow y[n] = y'[n]$$

因果性

- オンライン処理（リアルタイム処理）では，結果が原因に先んじることはない。
- 現在の出力は，現在と過去の入力にのみ依存し，未来の入力には依存しない。

因果的なシステムの条件

- システムの入出力関係

$$y[n] = \cdots + x[-1]h[n+1] + x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + \cdots$$
$$\cdots + x[n]h[0] + \underbrace{x[n+1]h[-1] + x[n+2]h[-2] + \cdots}_{\text{未来のデータ}}$$

- 未来のデータに依存しない条件

$$h[n] = 0,\ n < 0$$

離散時間LTIシステムの固有値

➢ 離散時間LTIシステムの出力は $h[n]$と $x[n]$の畳み込みとなる

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

➢ z変換が畳み込み演算の固有関数となることから，$x[n] = z^n$ とすれば，

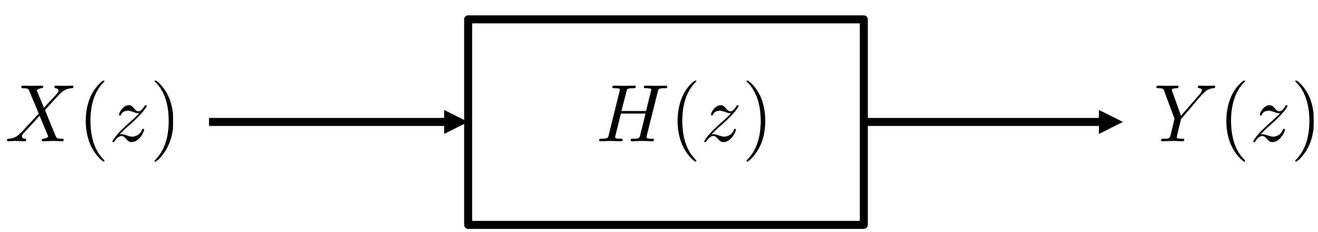
$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * z^n \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{n-m} \\ &= z^n \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m}}_{\text{固有値}} \end{aligned}$$

固有関数

伝達関数

➢ 伝達関数の定義：インパルス応答のz変換

$$
\begin{aligned}
&y[n] = h[n] * x[n] \\
&\Rightarrow \mathcal{Z}\left[y[n]\right] = \mathcal{Z}\left[h[n] * x[n]\right] \\
&\Rightarrow Y(z) = H(z)X(z) \\
&\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}
\end{aligned}
$$



伝達関数

- 伝達関数が有理関数で表される場合
  - 伝達関数の零点や極の配置が，離散時間LTIシステムの性質を決定する。
    - 極：BIBO安定性に影響
    - 零点：位相特性に影響

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$= \frac{b_0 \prod_{k=1}^{M} (1 - z_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^{N} (1 - p_k z^{-1})}$$

分母・分子多項式を
因数分解した形

因果性と伝達関数のROC

➢ 伝達関数はROC以外同じになる場合もある

$h_1[n] = u[n]$ ：因果的

$$H_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1[n] z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$(\mathrm{ROC} = \{z \mid |z| > 1\})$$

$h_2[n] = -u[-n-1]$ ：非因果的（全て未来の入力に依存）

$$H_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_2[n] z^{-n} = -z - z^2 - \cdots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$(\mathrm{ROC} = \{z \mid |z| < 1\})$$

本講義で扱う離散時間線形時不変システム

- 特にことわらない限り，本講義で取り扱う離散時間LTIシステムは，すべて因果的であるとする。

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

右側z変換に対応

BIBO安定性

BIBO安定性

- 定義：
  - 有界な入力$x[n] \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$に対し，有界な出力$y[n] = \mathcal{L}\left[x[n]\right] \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$が得られる離散時間システム$\mathcal{L}$を，bounded-input, bounded-output (BIBO) 安定なシステムと呼ぶ。

$$x[n] \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \Rightarrow y[n] \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$$

  - （線形かつBIBO安定なシステム $\mathcal{L}$ は，有界線形作用素となる）

- 因果的かつBIBO安定なシステムを実現可能なシステムと呼ぶ。

BIBO安定な離散時間LTIシステムの条件

- 離散時間LTIシステムは，<u>インパルス応答が絶対総和可能</u>である場合に限り，BIBO安定となる。

$$
\begin{aligned}
|y[n]| &= \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} h[m] x[n-m] \right| \\
&\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} |h[m]| \, |x[n-m]| \\
&\leq \|x[n]\|_\infty \sum_{m \in \mathbb{Z}} |h[m]| \\
&= \|x[n]\|_\infty \, \|h[n]\|_1 \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

$|x[n-m]| \leq \|x[n]\|_\infty$

$\|h[n]\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |h[n]|$

$\|h[n]\|_1 < \infty$ であることが十分条件

BIBO安定な離散時間LTIシステムの条件

- もし $h[n]$ が絶対総和可能でない場合
  - 次のような明らかに有界な入力$x[n]$を考える

$$x[n] = \begin{cases} -1, & h[-n] < 0 \\ 0, & h[-n] = 0 \\ 1, & h[-n] > 0 \end{cases}$$

  - $n = 0$ での出力 $y[0]$ は，

$$y[0] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h[m]x[-m] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[m]| = \|h[n]\|_1$$

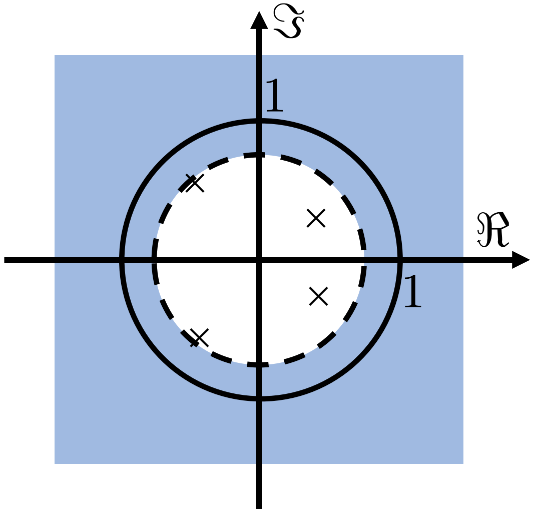
  - $h[n] \in \ell^1(\mathbb{Z})$ でなければ $y[n]$ は有界でない
  - この対偶より，BIBO安定であれば $h[n]$ は絶対総和可能 (必要条件)
- したがって，

離散時間LTIシステムがBIBO安定 ⟷ インパルス応答が絶対総和可能

伝達関数のBIBO安定性条件

- 因果的な離散時間LTIシステムは，その伝達関数の全ての極が単位円の内側にある場合に限り，BIBO安定となる。
  - 単位円上 $z = \exp(\mathrm{j}\Omega)$ の伝達関数を考えると，

$$
\begin{aligned}
|H(\exp(\mathrm{j}\Omega))| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} h[n]\exp(-\mathrm{j}\Omega n)\right| \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} |h[n]|\,|\exp(-\mathrm{j}\Omega n)| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| < \infty
\end{aligned}
$$



  - BIBO安定 $\Rightarrow$ $H(z)$ のROCが単位円を含む

- 因果的かつBIBO安定 $\Rightarrow$ 伝達関数の全ての極が単位円内

伝達関数のBIBO安定性条件

- 伝達関数の全ての極が単位円内にあるとする。
  - $H(z)$を部分分数分解すると，$(M < N)$

$$H(z) = \sum_{k=1}^{K} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}, \quad |p_k| < 1$$

$$\Rightarrow h[n] = \sum_{k=1}^{K} A_k p_k^n u[n]$$

$$\Rightarrow |h[n]| = \left| \sum_{k=1}^{K} A_k p_k^n u[n] \right| \leq \sum_{k=1}^{K} |A_k p_k^n|, \quad n \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{K} |A_k p_k^n| = \sum_{k=1}^{K} |A_k| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |p_k|^n \right) = \sum_{k=1}^{K} \frac{|A_k|}{1 - |p_k|} < \infty$$

$$x[n] = \alpha^n u[n] = \begin{cases} \alpha^n & n \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\left[x[n]\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

$$(\mathrm{ROC} = \{z \mid |z| > |\alpha|\})$$

インパルス応答が絶対総和可能

- 伝達関数の全ての極が単位円内 $\Rightarrow$ 因果的かつBIBO安定

（$M \geq N$ の場合も同様）

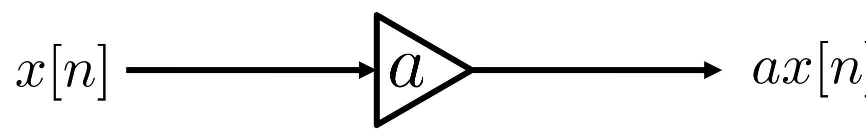
BIBO安定性と伝達関数の極

- 因果的な離散時間LTIシステムがBIBO安定である必要十分条件は，伝達関数の極が全て単位円内（境界含まず）に存在すること。

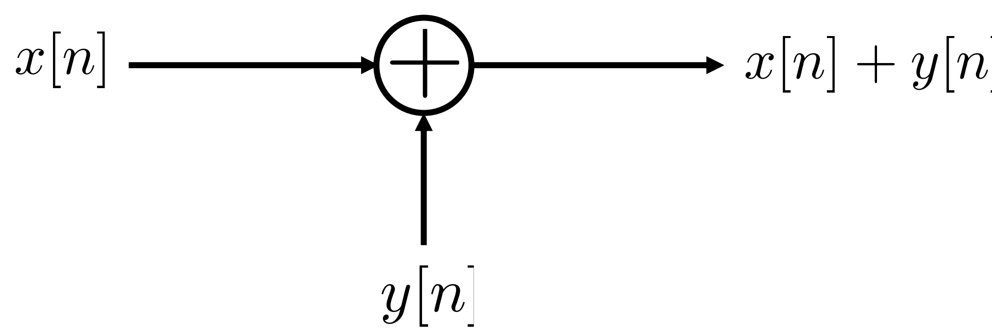
FIRシステム・IIRシステム

ブロック線図

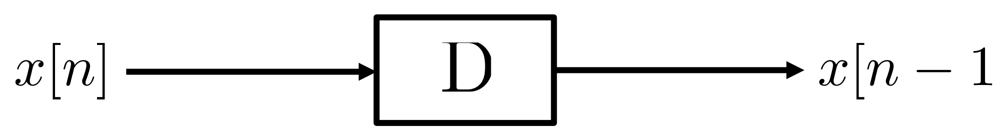
- 離散時間LTIシステムをDigital signal processor (DSP)としてハードウェアで実現するには？
  - ブロック線図でシステムを表現
  - DSPの構成単位
    - 乗算：乗算器



    - 加算：加算器



    - 時間シフト：メモリ



FIRシステム

- Finite impulse response (FIR)システム
  - インパルス応答が有限長であるシステム

差分方程式

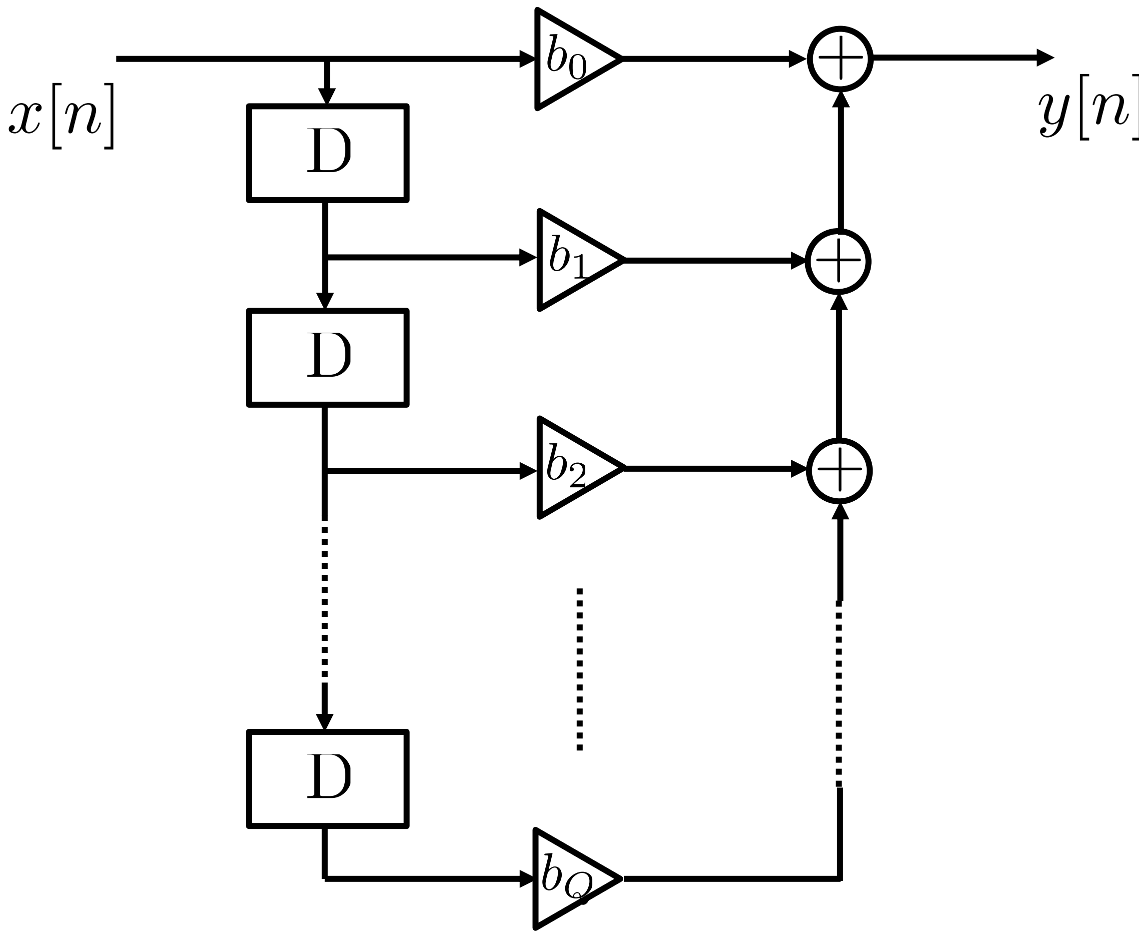
$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_Q x[n-Q]$$

伝達関数

$$\begin{aligned} Y(z) &= \mathcal{Z}\left[y[n]\right] \\ &= \mathcal{Z}\left[b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_Q x[n-Q]\right] \\ &= b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \cdots + b_Q z^{-Q} X(z) \\ &= \left(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_Q z^{-Q}\right) X(z) \end{aligned}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_Q z^{-Q}$$

ブロック線図



IIRシステム

- Infinite impulse response (IIR)システム
  - インパルス応答が無限長であるシステム

差分方程式

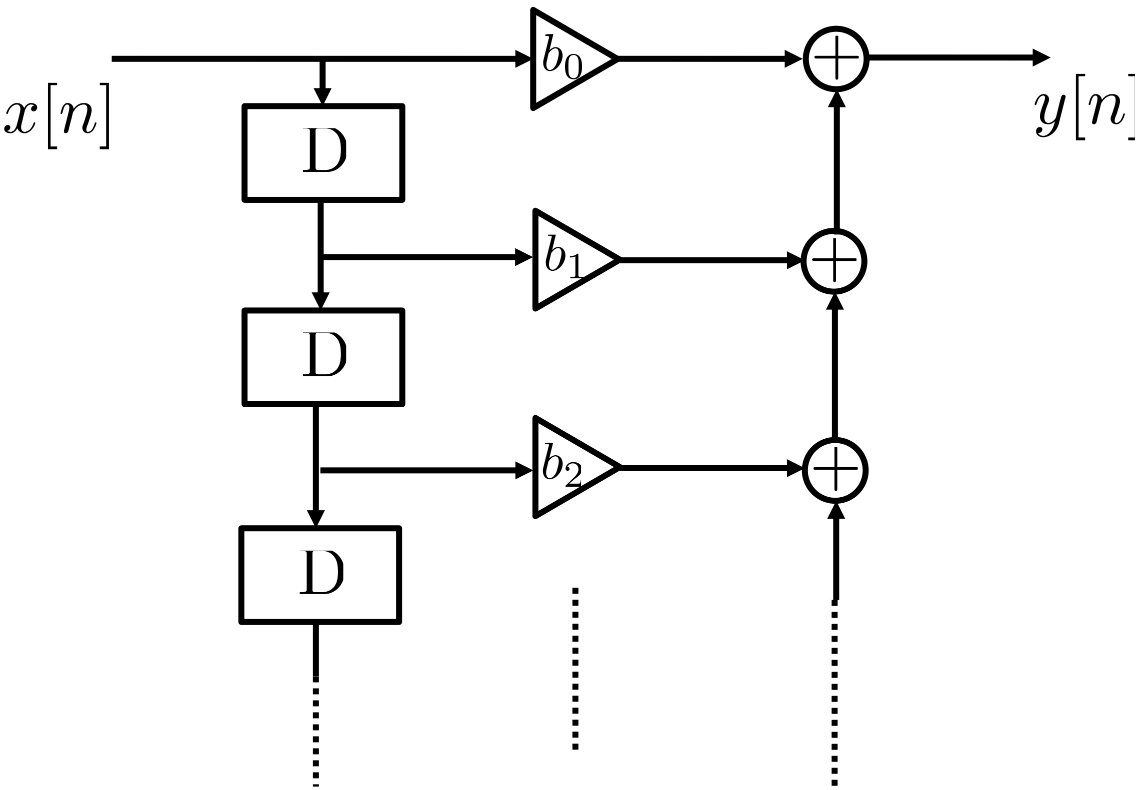
$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots$$

伝達関数

$$\begin{aligned} Y(z) &= \mathcal{Z}\left[y[n]\right] \\ &= \mathcal{Z}\left[b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots\right] \\ &= b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \cdots \\ &= \left(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots\right) X(z) \end{aligned}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots$$

ブロック線図



無限個のパーツが必要なため
実現できない・・・

IIRシステム

- 例えばステップのz変換は，

$$U(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- $U(z)$を伝達関数に持つシステムを考えると，

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + \cdots$$

無限のインパルス応答を持つため，
有限に記述できていない

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$$\Rightarrow (1 - z^{-1})Y(z) = X(z)$$

$$\Rightarrow y[n] - y[n-1] = x[n]$$

出力のフィードバックを利用する
ことで有限に記述できている。

IIRシステム

- 出力のフィードバックを利用した場合

差分方程式

$$
\begin{aligned}
&y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_P y[n-P] \\
&\quad = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_Q x[n-Q]
\end{aligned}
$$

伝達関数

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Z}\left[y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_P y[n-P]\right] \\
&\quad = \mathcal{Z}\left[b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_Q x[n-Q]\right] \\
&\Rightarrow \left(1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_P z^{-P}\right) Y(z) \\
&\quad = \left(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_Q z^{-Q}\right) X(z)
\end{aligned}
$$

IIRシステム

➢ 出力のフィードバックを利用した場合

伝達関数

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_Q z^{-Q}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_P z^{-P}}$$

- すべてのIIRシステムが有理関数で記述できるわけではないことに注意

– プロパー

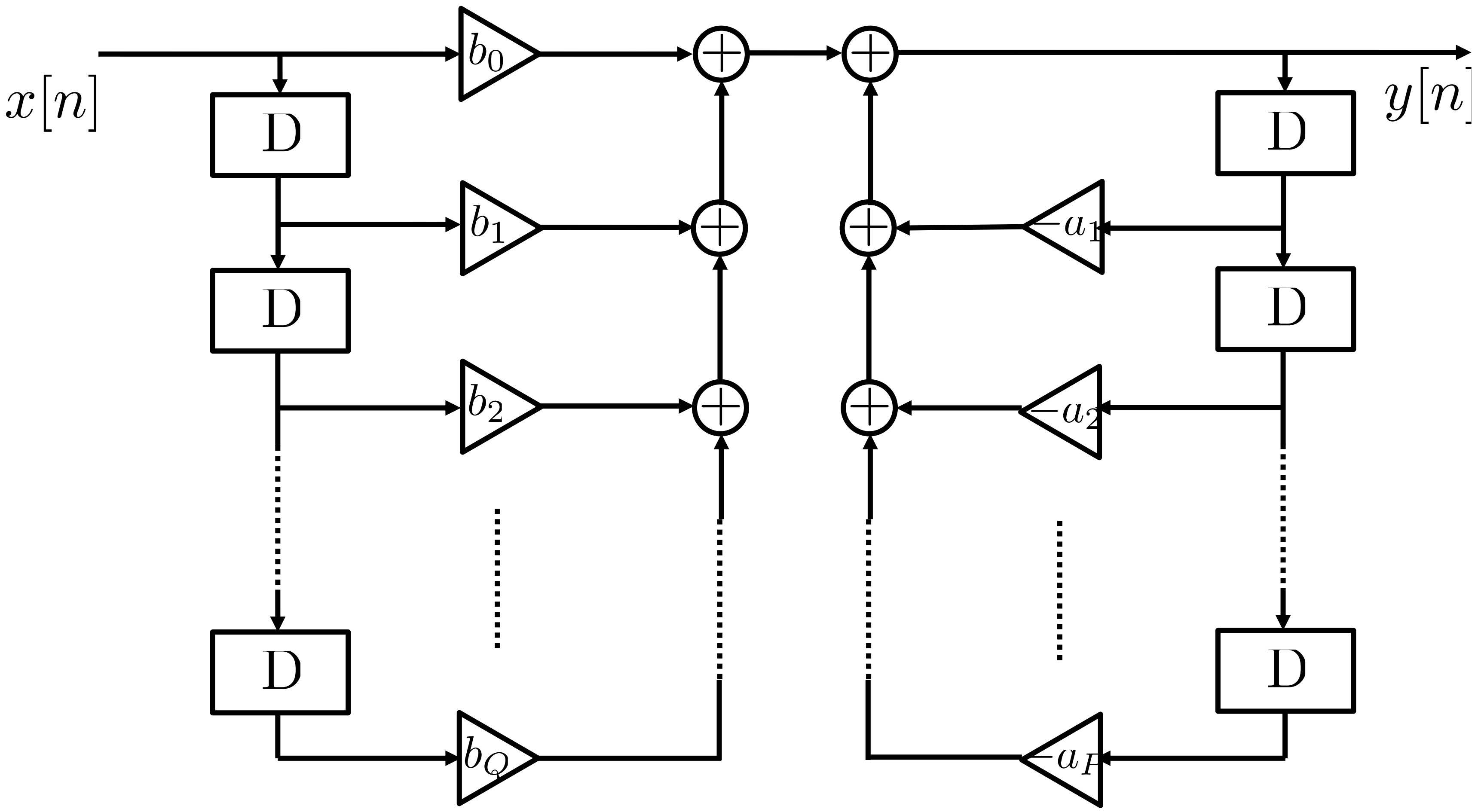
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_Q z^{-Q}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_P z^{-P}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{b_0 z^P + b_1 z^{P-1} + \cdots + b_Q z^{P-Q}}{z^P + a_1 z^{P-1} + \cdots + a_P}, & P \geq Q \\ \dfrac{b_0 z^Q + b_1 z^{Q-1} + \cdots + b_Q}{z^Q + a_1 z^{Q-1} + \cdots + a_P z^{Q-P}}, & P < Q \end{cases}$$

- 分母の次数≥分子の次数のときプロパー，逆は非プロパー
- 分母の次数＞分子の次数のとき真にプロパー
- 因果的な離散時間LTIシステムの伝達関数は常にプロパー

IIRシステム

ブロック線図



参考文献

1. 眞溪歩, "ディジタル信号処理工学," 昭晃堂, 2004.
2. M. Vetterli, J. Kovačević, and V. K. Goyal, "Foundations of Signal Processing," Cambridge University Press, 2014.