信号処理論第一：第4回
Fourier変換・離散時間Fourier変換

東京大学 大学院情報理工学系研究科 システム情報学専攻
小山 翔一

講義の目的と概要

- 講義の目的
  - 信号処理の基礎を習得する。

- 講義の概要
  - 決定論的信号（確定的信号）に関する信号処理について，基礎事項を理解する。本講義では，できるだけ特定の応用分野に限らない，一般的な信号処理論について講義する。ただし，統計的信号処理については扱わず，信号処理論第二の範囲となる。

- キーワード
  - Fourier級数, Fourier変換, 離散時間Fourier変換, 離散Fourier変換, FFT, 窓Fourier変換, 線形時不変システム, サンプリング定理, インパルス応答, 伝達関数, 周波数応答, 差分方程式, ブロック線図, 因果性, 安定性, FIRフィルタ, IIRフィルタ

講義スケジュール

- Sセメスター 金曜１限 @~~63講義室~~ zoom

- 日程（暫定版）
  - 4/10　第１回
  - 4/17　第２回
  - 4/24　第３回
  - 5/ 1　第４回
  - 5/ 8　休講
  - 5/15　第５回
  - 5/29　補講 - 第６回
  - 6/ 5　第７回
  - 6/12　第８回
  - 6/19　第９回
  - 6/26　第１０回
  - 7/3　第１１回
  - 7/10　第１２回
  - 7/17　学期末試験 (?)

オンライン講義の実施方法

- zoom（https://zoom.us/）を用いる。設定方法等についてはポータルサイト（https://utelecon.github.io/oc/）を参照すること。
- 講義のURLは毎回同じにする予定だが，念のため毎回UTASをチェックすること。
- 質問がある場合は手を挙げるボタンを押すこと。タイミングをみてこちらからマイクのミュートを解除する。
- チャットにも適宜質問やコメントを書いてもらって構わない。ただし，こちらからはリアルタイムで内容を追うことは難しいと思われる。
- もしオンラインでの受講に不都合が生じた場合は，メール等で連絡すること。

shoichi_koyama@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

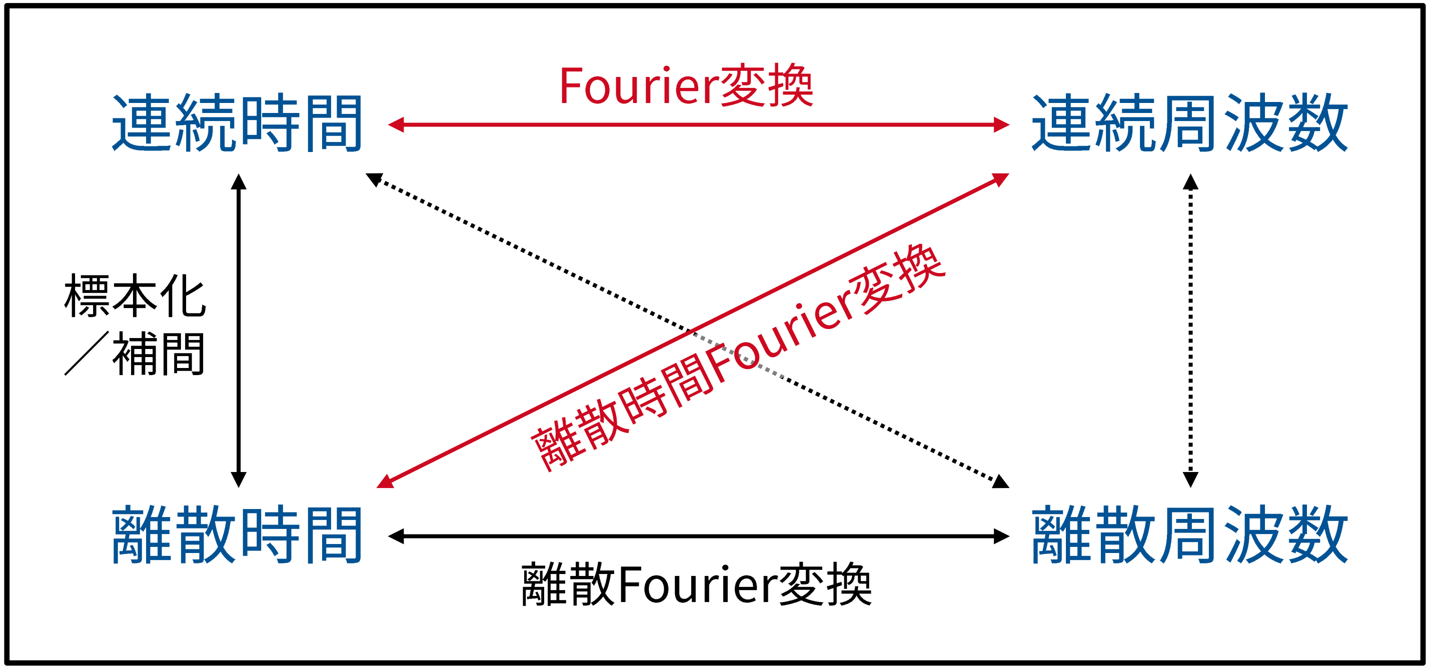
講義資料と成績評価

- 講義資料
  - https://www.sh01.org/ja/teaching/
  - システム１研のウェブサイトからたどることもできる
  - できるだけ講義前日までに資料をアップロードするようにします。

- 成績評価
  - 学期末試験（変更の可能性が高いが暫定として）

本日の目次

1. Fourier変換
2. 離散時間Fourier変換



FOURIER変換

Fourier変換

- Fourier変換は，連続時間信号から連続周波数成分への変換を行い，これらは信号の等価な表現となる。

$$x(t) \underset{\text{逆Fourier変換}}{\overset{\text{Fourier変換}}{\rightleftarrows}} X(\omega)$$

時間領域

(角)周波数領域

Fourier級数からFourier変換へ

- Fourier級数展開再考
  - Fourier級数展開は，信号の近似が目的
  - 対象は周期信号でなければならない
    - 周期信号という制約によって，連続(非可算)無限個の自由度を持つ信号を，可算無限個の基底への展開で表すことができた。
  - 収束するなら，$x(t)$と$(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$は等価な情報
    - どちらを見るかは視点の違い

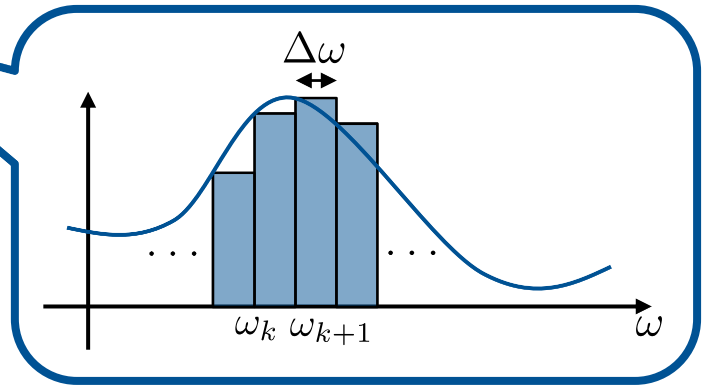
$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(\mathrm{j}\frac{2\pi kt}{T}\right)}$$

Fourier級数からFourier変換へ

- Fourier級数展開の非周期信号への拡張
  - $\Delta\omega = 2\pi/T,\ \omega_k = 2\pi k/T$ と置き換える。

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\exp\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi k t}{T}\right)\mathrm{d}t\right]\exp\left(\mathrm{j}\frac{2\pi k t}{T}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\exp\left(-\mathrm{j}\omega_k t\right)\mathrm{d}t\right]\exp\left(\mathrm{j}\omega_k t\right)\Delta\omega$$



  - $T \to \infty\ (\Delta\omega \to 0)$ とすれば，

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp\left(-\mathrm{j}\omega t\right)\mathrm{d}t\right]\exp\left(\mathrm{j}\omega t\right)\mathrm{d}\omega$$

Fourier変換の定義

➢ 連続時間信号から連続周波数の複素数値関数への変換

- Fourier変換

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp\left(-\mathrm{j}\omega t\right) \mathrm{d}t$$

$$(\omega \in \mathbb{R})$$

- 逆Fourier変換

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp\left(\mathrm{j}\omega t\right) \mathrm{d}\omega$$

$$(t \in \mathbb{R})$$

Fourier変換の定義

- Fourier変換と逆Fourier変換を以下のように表記。

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = x(t)$$

- Fourier変換対を以下のように表記。

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathrm{FT}} X(\omega)$$

Fourier変換の定義

- Fourier変換は（形式上）$L^2(\mathbb{R})$での内積の形となっている。

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \langle x(t), \exp(\mathrm{j}\omega t) \rangle$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \langle X(\omega), \exp(-\mathrm{j}\omega t) \rangle$$

  – （形式上と書いたのは $\exp(\mathrm{j}\omega t) \notin L^2(\mathbb{R})$ のため。）

- 以下の定義では，Fourier変換は正規化された変換となる。

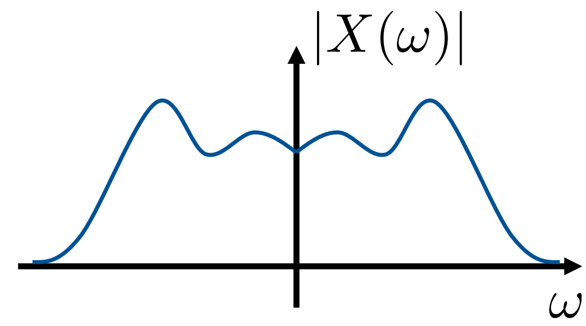
$$X(\omega) = \left\langle x(t), \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp(\mathrm{j}\omega t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp\left(-\mathrm{j}\omega t\right) \mathrm{d}t$$

$$x(t) = \left\langle X(\omega), \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp(-\mathrm{j}\omega t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp\left(\mathrm{j}\omega t\right) \mathrm{d}\omega$$

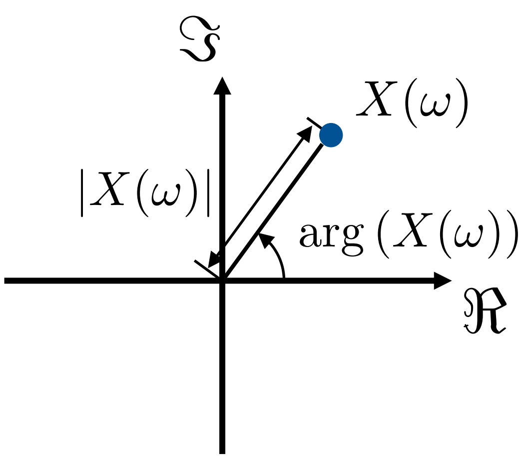
  – ここでも慣習的に使われる前々スライドの定義を用いる。

Fourier変換の意味

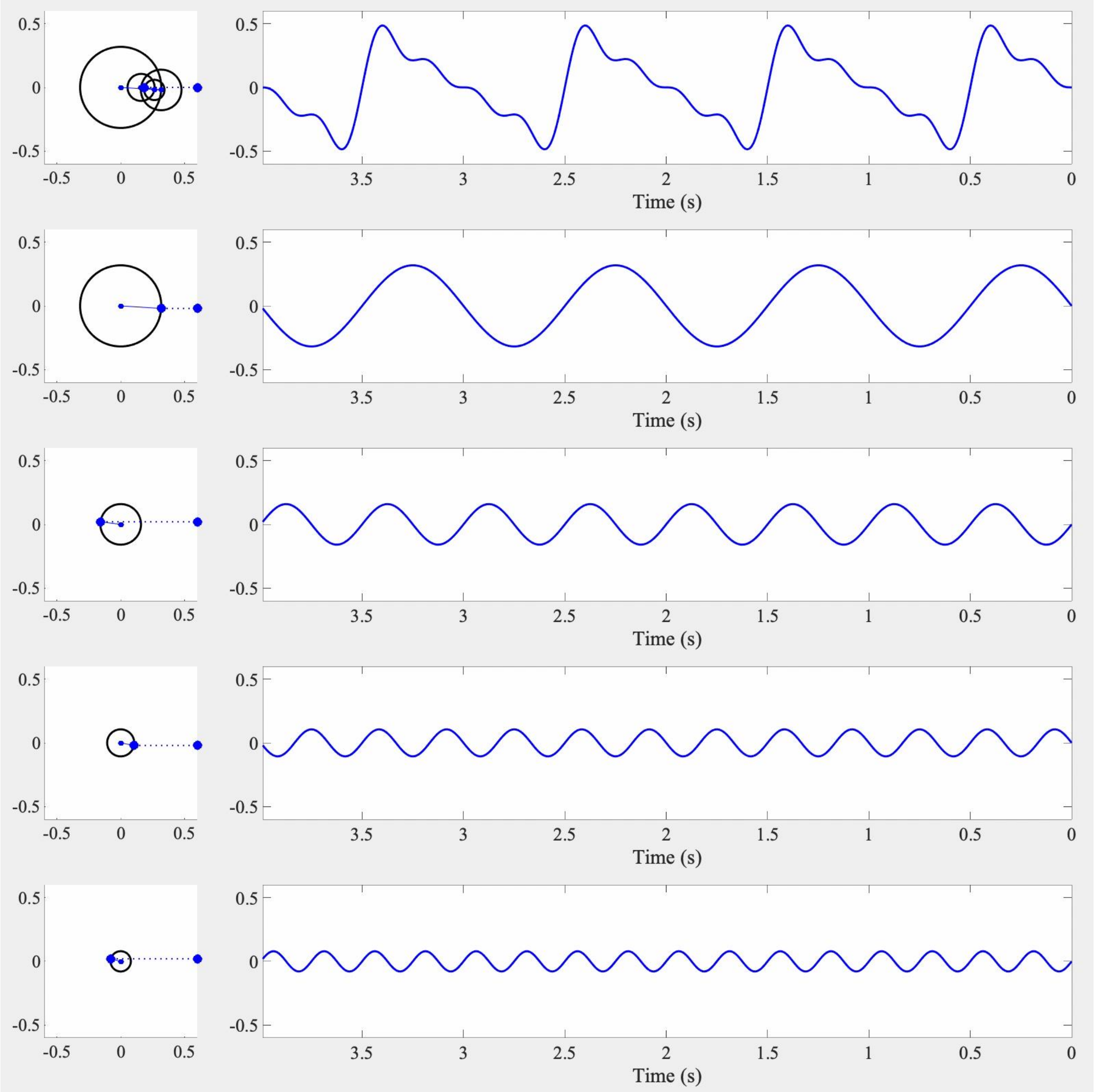
- ω：(角)周波数
- $X(\omega)$ を変数 ω の複素数値関数と見るとき
  - $X(\omega)$ ：(角)周波数スペクトル
  - $|X(\omega)|$ ：振幅スペクトル
  - $|X(\omega)|^2$ ：パワースペクトル
  - $\arg\left(X(\omega)\right)$ ：位相スペクトル



- $X(\omega)$ を ω での複素数値（スカラー）と見るとき
  - $|X(\omega)|$：振幅
  - $|X(\omega)|^2$：パワー
  - $\arg\left(X(\omega)\right)$：位相



Fourier変換の意味



Fourier変換可能な関数

- $x(t) \in L^1(\mathbb{R})$ (絶対可積分関数)であればFourier変換可能。

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ x(t) \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \mathrm{d}t < \infty \right\}$$

絶対可積分関数のFourier変換は有界かつ連続

- 有界性の証明：

$$\begin{aligned} |X(\omega)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-\mathrm{j}\omega t) \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \, |\exp(-\mathrm{j}\omega t)| \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \, \mathrm{d}t \\ &< \infty \end{aligned}$$

Fourier変換可能な関数

- Fourier変換を$L^1(\mathbb{R})$から$L^2(\mathbb{R})$の関数に拡張することは単純ではないが，結論から言うと$x(t) \in L^2(\mathbb{R})$もFourier変換可能であり，$X(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$となる。
  - $x(t) \notin L^1(\mathbb{R})$であるためにFourier変換の積分が計算できない場合も，$x(t) \in L^2(\mathbb{R})$であればそのFourier変換の存在が保証される。

- $L^1(\mathbb{R})$でも$L^2(\mathbb{R})$でもない関数はFourier変換できる？

➡ 超関数の概念が必要となる

- 例：$x(t) = 1$ の場合

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega)$$

➡ $1 \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega)$

Diracのデルタ関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t-\alpha)\mathrm{d}t = \varphi(\alpha)$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

※厳密には正しい記述ではない

Fourier級数展開との違い

- 近似を目的としていない。
  - (角)周波数を変数とする連続関数（周波数領域）への等価な「変換」が目的であり，周波数成分の分析などを可能とする。
- 対象とする関数が周期関数でなくてよい。
  - ただし，厳密にはFourier変換可能な関数のクラスが存在することに注意。

Fourier変換の性質

$x(t) \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} X(\omega),\ y(t) \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} Y(\omega)$とする。

- 線形性

$$\mathcal{F}\left[\alpha x(t) + \beta y(t)\right] = \alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)$$

- 時間シフト（周波数シフト）

$$\mathcal{F}\left[x(t-\tau)\right] = \exp(-\mathrm{j}\omega\tau)X(\omega)$$

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\left[X(\omega-\omega_0)\right] = \exp(\mathrm{j}\omega_0 t)x(t)\right)$$

<u>Proof</u>

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[x(t-\tau)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\exp(-\mathrm{j}\omega(u+\tau))\mathrm{d}u \\ &= \exp(-\mathrm{j}\omega\tau)\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\exp(-\mathrm{j}\omega u)\mathrm{d}u \\ &= \exp(-\mathrm{j}\omega\tau)X(\omega)\end{aligned}$$

変数変換：
$u = t - \tau$

Fourier変換の性質

- 複素共役

$$\mathcal{F}\left[x^*(t)\right] = X^*(-\omega)$$

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\left[X^*(\omega)\right] = x^*(-t)\right)$$

Proof

$$\begin{aligned} X^*(-\omega) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t\right)^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t \\ &= \mathcal{F}\left[x^*(t)\right] \end{aligned}$$

- スケール変換

$$\mathcal{F}\left[x(\alpha t)\right] = \frac{1}{|\alpha|}X\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Proof

$u = \alpha t$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[x(\alpha t)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\exp\left(-\mathrm{j}\frac{\omega}{\alpha}u\right)\frac{\mathrm{d}u}{|\alpha|} \\ &= \frac{1}{|\alpha|}X\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Fourier変換の性質

➢ 畳み込みと積

$$\mathcal{F}\left[x(t) * y(t)\right] = X(\omega)Y(\omega)$$

$$\mathcal{F}\left[x(t)y(t)\right] = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * Y(\omega)$$

Proof

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[x(t) * y(t)\right] &= \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau\,\exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\exp(-\mathrm{j}\omega\tau)Y(\omega)\mathrm{d}\tau \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\exp(-\mathrm{j}\omega\tau)\mathrm{d}\tau\right]Y(\omega) \\
&= X(\omega)Y(\omega)
\end{aligned}$$

➢ Parsevalの等式（一般化Parsevalの等式）

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) Y^*(\omega) \mathrm{d}\omega \right)$$

Proof

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) Y^*(\omega) \mathrm{d}\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t) \exp(-\mathrm{j}\omega t) \mathrm{d}t \right]^* \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} y^*(t) \exp(\mathrm{j}\omega t) \mathrm{d}t \mathrm{d}\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(\mathrm{j}\omega t) \mathrm{d}\omega \right] y^*(t) \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Fourier変換の性質

➢ 微分

$$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right] = \mathrm{j}\omega X(\omega)$$

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}X(\omega)\right] = -\mathrm{j}t x(t)\right)$$

Proof

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{x(t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)|_{-\infty}^{\infty}}_{\text{絶対可積分の条件より0}} + \mathrm{j}\omega\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{j}\omega X(\omega)\end{aligned}$$

部分積分

Fourier変換の性質

➢ 相関関数

$$\mathcal{F}\left[r_{xy}(\tau)\right] = X(\omega)Y^*(\omega)$$

$$\mathcal{F}\left[r_{xx}(\tau)\right] = \left|X(\omega)\right|^2$$

Wiener-Khinchinの定理

ここで，

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)\mathrm{d}t$$ ：相互相関関数

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)\mathrm{d}t$$ ：自己相関関数

Proof

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[r_{xy}(\tau)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)\mathrm{d}t\right]\exp(-\mathrm{j}\omega\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(-(\tau-t))\mathrm{d}t\right]\exp(-\mathrm{j}\omega\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y^*(-\tau)\exp(-\mathrm{j}\omega\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= X(\omega)Y^*(\omega)
\end{aligned}$$

畳み込みと積，
複素共役の性質

Fourier変換の性質

➢ 対称性

$x(t)$		$X(\omega)$	
$\Re$	$\Im$	$\Re$	$\Im$
even	0	even	0
odd	0	0	odd
0	even	0	even
0	odd	odd	0

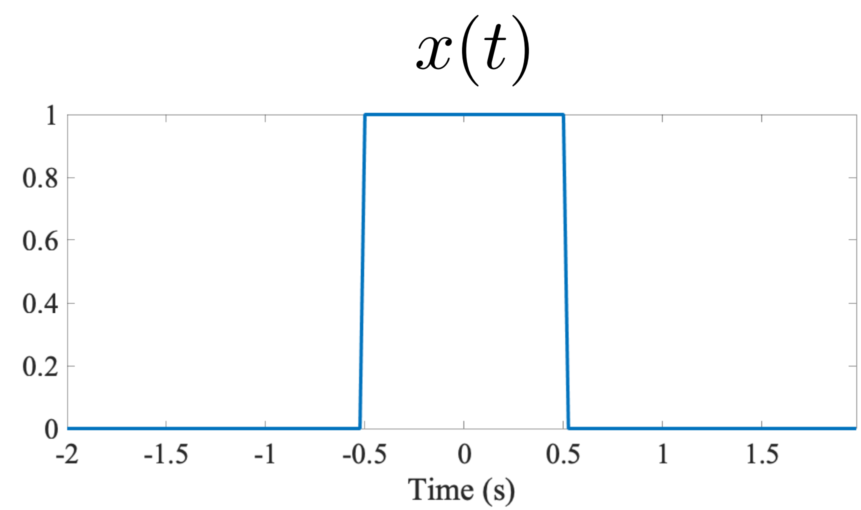
※ 証明はFourier級数の場合と同様

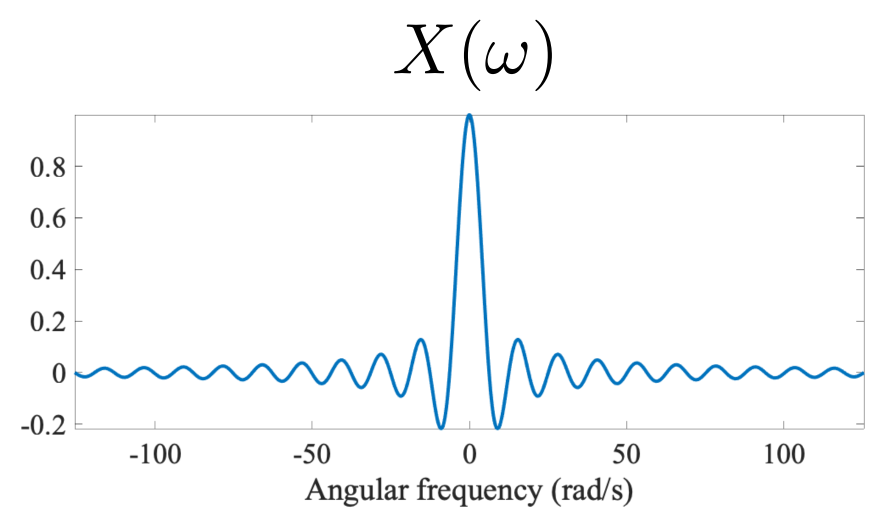
- 矩形波パルス

$$x(t) = \mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} 1 \cdot \exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{-1}{\mathrm{j}\omega}\exp(-\mathrm{j}\omega t)\Big|_{-1/2}^{1/2} \\ &= \frac{2}{\omega}\frac{\exp\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{2}\right) - \exp\left(-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}\right)}{2\mathrm{j}} \\ &= 2\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega} \\ &= \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

sinc関数





- Diracのデルタ関数

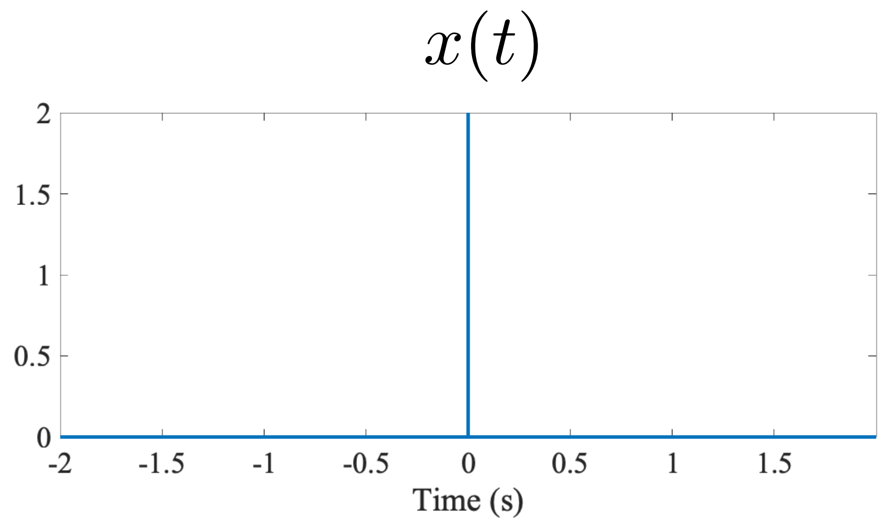
$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t-\alpha)\mathrm{d}t = \varphi(\alpha)$$

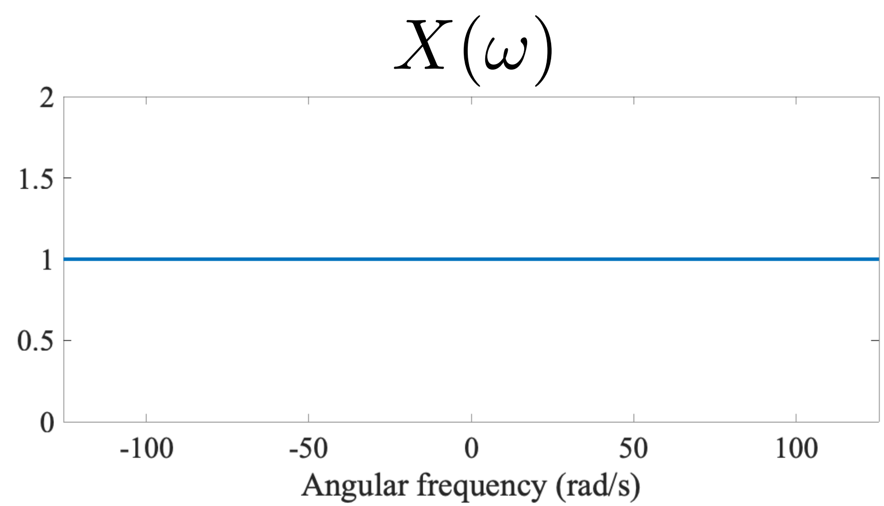
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

※厳密には正しい記述ではない

$$x(t) = \delta(t)$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t \\ &= \exp(-\mathrm{j}\omega \cdot 0) \\ &= 1 \end{aligned}$$





Fourier変換の例 3/4

➢ Diracのデルタ関数－時間シフトを含む場合

$$x(t) = \delta(t-\tau)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t$$

$$= \exp(-\mathrm{j}\omega\tau)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t$$

$$= \exp(-\mathrm{j}\omega\tau)$$

時間シフトの性質

$\delta(t)$ のFourier変換

Fourier変換対

- Fourier変換と逆変換のペアとなる関数
  - 例1/4

$$\mathrm{rect}(t) \xleftrightarrow{\mathrm{FT}} \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{\mathrm{FT}} 2\pi\mathrm{rect}(\omega)$$

  - 例2/4

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathrm{FT}} 1 \qquad 1 \xleftrightarrow{\mathrm{FT}} 2\pi\delta(\omega)$$

  - 例3/4

$$\delta(t-\tau) \xleftrightarrow{\mathrm{FT}} \exp(-\mathrm{j}\omega\tau) \qquad \exp(\mathrm{j}\omega_0 t) \xleftrightarrow{\mathrm{FT}} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

Fourier変換対

- Fourier変換と逆変換のペアとなる関数
  - 例1/4

$$\mathrm{rect}(t) \stackrel{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2}\right) \stackrel{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} 2\pi\mathrm{rect}(\omega)$$

- 矩形関数は$L^1(\mathbb{R})$の関数であり，そのFourier変換は直接計算できる
- sinc関数は $L^1(\mathbb{R})$ ではないが$L^2(\mathbb{R})$ の関数
- sinc関数のFourier変換を直接計算しようとすると積分計算が厄介だが，$L^2(\mathbb{R})$であることよりFourier変換が存在することは保証される
- 矩形関数の逆Fourier変換を計算することで，厄介な積分計算を避けてsinc関数のFourier変換対が得られる

- デルタ列

周期 T のデルタ関数の列

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

– 一旦，周期関数であるデルタ列のFourier級数展開表現を考える。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\mathrm{j}\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\exp\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\exp\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\mathrm{j}\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

Fourier変換の例 4/4

- デルタ列
  - デルタ列のFourier級数展開をFourier変換すれば，

$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \exp(-\mathrm{j}\omega t) \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\mathrm{j}\frac{2\pi n t}{T}\right) \exp(-\mathrm{j}\omega t) \mathrm{d}t \\
&= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)
\end{aligned}
$$

Fourier
級数展開

$$
\boxed{\exp(\mathrm{j}\omega_0 t) \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)}
$$

→ デルタ列のFourier変換もまたデルタ列となる

周波数を用いたFourier変換の定義

- 角周波数 ω ではなく周波数 f を用いて定義する。

$$X(f) = \mathcal{F}\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp\left(-\mathrm{j}2\pi f t\right) \mathrm{d}t$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[X(f)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp\left(\mathrm{j}2\pi f t\right) \mathrm{d}f$$

- 線形性，畳み込み，スケール変換の性質はそのまま。
- 乗算，微分の性質，Parsevalの等式は係数が異なる。

$$\mathcal{F}\left[x(t)y(t)\right] = X(f) * Y(f) \qquad \mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t)\right] = \mathrm{j}2\pi f X(f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \mathrm{d}f$$

離散時間FOURIER変換

離散時間Fourier変換

- 離散時間Fourier変換は，離散時間信号（ディジタル信号）を連続周波数成分に変換することを目的とする。

$$x[n] \;\underset{\text{逆離散時間Fourier変換}}{\overset{\text{離散時間Fourier変換}}{\rightleftarrows}}\; X(\omega)$$

離散時間領域

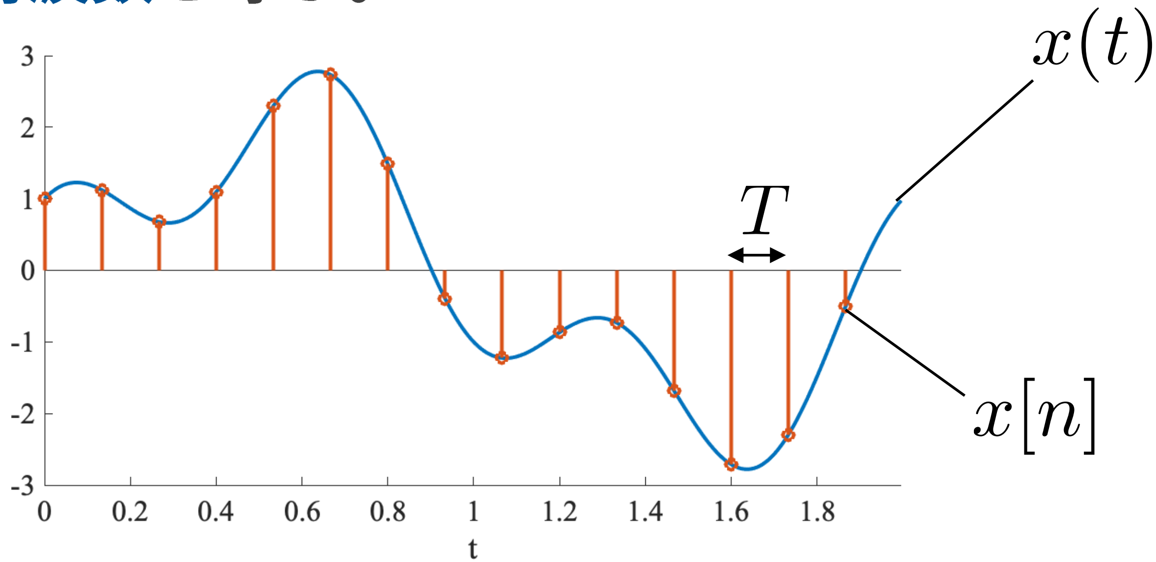
連続(角)周波数領域

離散時間Fourier変換

- 離散時間信号を連続時間信号を用いて表現する。
- 一定時間間隔 T ごとの連続時間信号 $x(t)$ の値を離散時間信号とすれば，

$$x[n] = x(nT) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

この操作を**標本化**あるいは**サンプリング**と呼び，サンプリングの時間間隔 T を**サンプリング周期**，その逆数を**サンプリング周波数**と呼ぶ。



離散時間Fourier変換

- 離散時間信号をFourier変換すると，

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT)}^{x[n]\,\text{の形式的な表現}} \exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \exp(-\mathrm{j}\omega nT)$$

$$\Rightarrow \quad X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp\left(-\mathrm{j}\Omega n\right)$$

$$\Omega = \omega T = 2\pi \frac{f}{1/T}$$ ：規格化周波数

離散時間Fourier変換

- $X(\Omega)$は周期2πの周期関数

$$
\begin{aligned}
X(\Omega + 2\pi m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp\left(-\mathrm{j}(\Omega + 2\pi m)n\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp\left(-\mathrm{j}\Omega n\right) \\
&= X(\Omega)
\end{aligned}
$$

離散時間Fourier変換の定義

➢ 離散時間信号から連続周波数の複素数値関数への変換

- 離散時間Fourier変換

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp\left(-\mathrm{j}\Omega n\right) \qquad (\Omega \in \mathbb{R})$$

- 逆離散時間Fourier変換

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \exp\left(\mathrm{j}\Omega n\right) \mathrm{d}\Omega \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

積分区間は 2π の連続した区間であればよい
（導出は後日・・・）

離散時間Fourier変換の定義

- 離散時間Fourier変換と逆離散時間Fourier変換を以下のように表記。

$$\mathrm{DTFT}\left[x[n]\right] = X(\Omega)$$

$$\mathrm{DTFT}^{-1}\left[X(\Omega)\right] = x[n]$$

- 離散時間Fourier変換対を以下のように表記。

$$x[n] \overset{\mathrm{DTFT}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$$

離散時間Fourier変換の定義

- 離散時間Fourier変換を内積の形で表すと，

$$X(\Omega) = \langle x[n], \exp(\mathrm{j}\Omega n) \rangle$$

$\ell^2(\mathbb{Z})$での内積

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \langle X(\Omega), \exp(-\mathrm{j}\Omega n) \rangle$$

$L^2([-\pi, \pi])$での内積

離散時間Fourier変換の存在と収束

- 数列 $x[n]$ $(n \in \mathbb{Z})$ が $\ell^1(\mathbb{Z})$ であれば離散時間Fourier変換が存在し，絶対収束する。

$$
\begin{aligned}
|X(\Omega)| &= \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \exp(-\mathrm{j}\Omega n) \right| \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x[n] \exp(-\mathrm{j}\Omega n)| \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x[n]| \, |\exp(-\mathrm{j}\Omega n)| \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x[n]| \\
&= \|x\|_1 \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

$\ell^1(\mathbb{Z})$ 以外へ拡張する場合は収束の意味に変更を加えることが必要

離散時間Fourier変換の性質

- 線形性

$$\mathrm{DTFT}\left[\alpha x[n] + \beta y[n]\right] = \alpha X(\Omega) + \beta Y(\Omega)$$

- 時間シフト（周波数シフト）

$$\mathrm{DTFT}\left[x[n-m]\right] = \exp(-\mathrm{j}\Omega m) X(\Omega)$$

$$\left(\mathrm{DTFT}^{-1}\left[X(\Omega - \Omega_0)\right] = \exp(\mathrm{j}\Omega_0 n) x[n]\right)$$

- 複素共役

$$\mathrm{DTFT}\left[x^*[n]\right] = X^*(-\Omega)$$

$$\left(\mathrm{DTFT}^{-1}\left[X^*(\Omega)\right] = x^*[-n]\right)$$

離散時間Fourier変換の性質

- 畳み込みと積

$$\mathrm{DTFT}\left[x[n]*y[n]\right]=X(\Omega)Y(\Omega)$$

$$\mathrm{DTFT}\left[x[n]y[n]\right]=\frac{1}{2\pi}X(\Omega)\circledast Y(\Omega)$$

Proof

$$\begin{aligned}\mathrm{DTFT}\left[x[n]y[n]\right]&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]y[n]\exp(-\mathrm{j}\Omega n)\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega')\exp(\mathrm{j}\Omega' n)\mathrm{d}\Omega' y[n]\exp(-\mathrm{j}\Omega n)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega')\sum_{n=-\infty}^{\infty}y[n]\exp\left(-\mathrm{j}(\Omega-\Omega')n\right)\mathrm{d}\Omega'\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega')Y(\Omega-\Omega')\mathrm{d}\Omega'\\&=\frac{1}{2\pi}X(\Omega)\circledast Y(\Omega)\end{aligned}$$

離散時間Fourier変換の性質

- Parsevalの等式（一般化Parsevalの等式）

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 \mathrm{d}\Omega$$

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)Y^*(\Omega)\mathrm{d}\Omega\right)$$

- 相関関数

$$\mathrm{DTFT}\left[r_{xy}[m]\right] = X(\Omega)Y^*(\Omega)$$

$$\mathrm{DTFT}\left[r_{xx}[m]\right] = |X(\Omega)|^2$$

ここで， $r_{xy}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+m]y^*[n]$

離散時間Fourier変換の性質

➢ 対称性

$x[n]$		$X(\Omega)$	
$\Re$	$\Im$	$\Re$	$\Im$
even	0	even	0
odd	0	0	odd
0	even	0	even
0	odd	odd	0

離散時間Fourier変換とFourier級数展開

➢ 離散時間Fourier変換はFourier級数展開を周波数領域の関数に対して適用した形とも見れる。

離散時間Fourier変換

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-\mathrm{j}\Omega n)$$

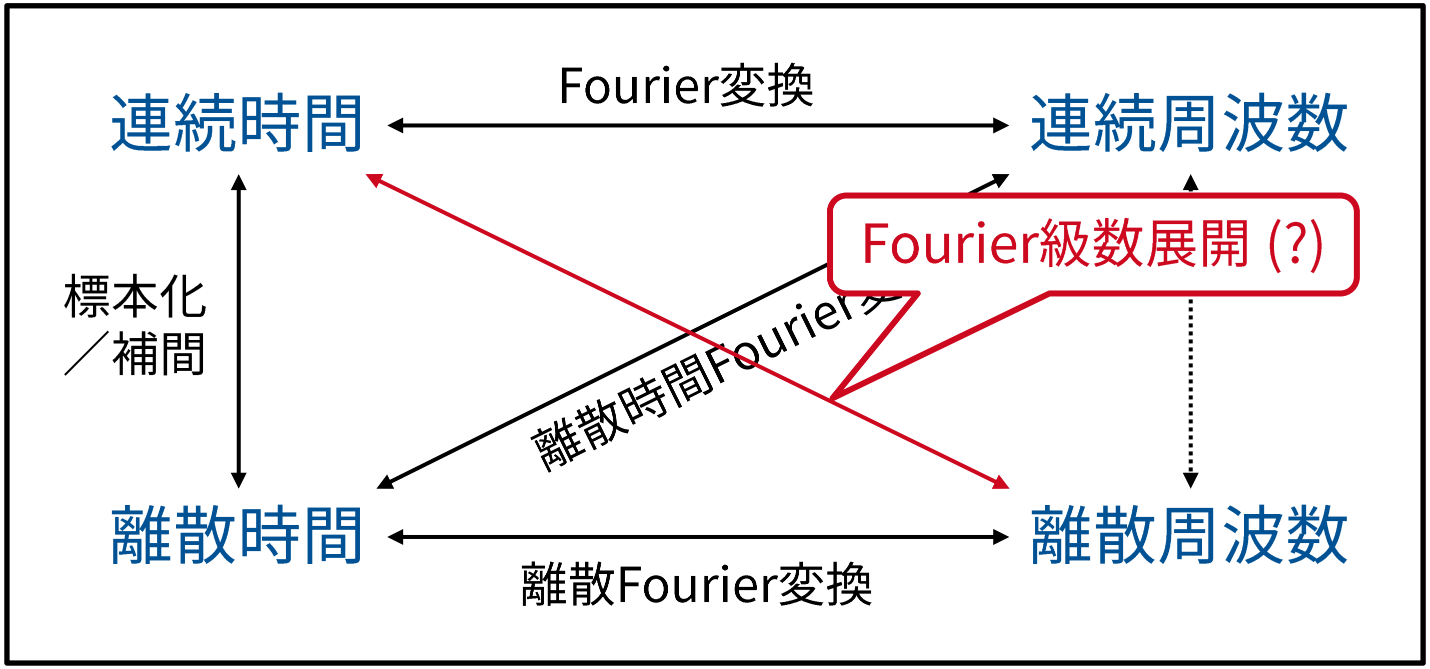
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \exp(\mathrm{j}\Omega n)\, \mathrm{d}\Omega$$

Fourier級数展開

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\mathrm{j}\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi n t}{T}\right) \mathrm{d}t$$

離散時間Fourier変換とFourier級数展開



- Fourier級数展開もFourier変換で見たような性質を持つ
  - Parsevalの等式，対称性についてはすでに示した
  - 線形性，畳み込みと乗算，時間シフト・周波数シフト，複素共役，相関関数の性質なども成り立つ

参考文献

1. 眞溪歩, "ディジタル信号処理工学," 昭晃堂, 2004.
2. M. Vetterli, J. Kovačević, and V. K. Goyal, "Foundations of Signal Processing," Cambridge University Press, 2014.